

Note for Partial Wave Analysis

Spin Formalism

One-Particle State at Rest

Relativistic One-Particle State

the canonical state

the helicity state

正则量子态和helicity态之间的联系

Two-Particle States

Construction of two-particle states in the canonical basis

Construction of two-particle states in the helicity basis

Connection between canonical and helicity states

Decay Amplitude

S-matrix for two-body reactions

两体衰变

级联衰变(sequential decays)

Helicity angle and frame rotation

helicity机制下坐标系的变换

以 $\Lambda_b^0 \rightarrow \psi K^- p$ 为例

Λ^* decay chain振幅

P_c^+ decay chain的振幅

考虑所有衰变过程的总不变振幅为:

Amplitude analysis of process $Y \rightarrow \psi(3683)\pi^+\pi^-$

Amplitude construction

Decay sequence: $Y \rightarrow Z_c^\pm \pi^\mp, Z_c^\pm \rightarrow \psi(3683)\pi^\pm$

Decay sequence: $Y \rightarrow R_n \psi(3686), R_n \rightarrow \pi^+\pi^-$

$Y \rightarrow \psi\pi^+\pi^-$ 过程的总振幅

所有过程的总振幅

$L - S$ coupling partial wave amplitude

Decay sequence: $Y \rightarrow Z_c^\pm \pi^\mp, Z_c^\pm \rightarrow \psi(3683)\pi^\pm$

Decay sequence: $Y \rightarrow R_n \psi(3686), R_n \rightarrow \pi^+\pi^-$

关于拟合的讨论

目标函数的一种构造方式

构造目标函数

Monte Carlo 积分

Note for Partial Wave Analysis

Li Xuhong, lixuhong@mail.ustc.edu.cn

Spin Formalism ¹

One-Particle State at Rest

在非相对论量子力学中, 角动量算符可以构造无限小旋转变换的生成元, 因而可以用粒子的自旋来描述静止粒子在空间旋转变换下的行为.

以下是关于角动量算符 \vec{J} 及粒子的角动量态矢量 $|jm\rangle$ 的一些知识回顾:

角动量算符的对易关系:

- 角动量算符的三个分量为: J_x, J_y, J_z 或 J_1, J_2, J_3

- 角动量算符的对易关系为:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

正则基矢(**canonical basis vectors**) $|jm\rangle$ 的一些特性:

- 静止中的单粒子态利用正则角动量态矢量表示 $|jm\rangle$, 角动量算符作用到态矢上:

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle \\ J_z|jm\rangle &= m|jm\rangle \\ J_{\pm}|jm\rangle &= \sqrt{(J_{\mp})(j \pm m + 1)}|jm\rangle \end{aligned}$$

其中 $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$

- 正则角动量基矢的归一化关系:

$$\langle j'm'|jm\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}$$

- 正则角动量基矢的完备性关系:

$$\sum_{jm} |jm\rangle\langle jm| = 1$$

旋转算符对于角动量基矢的作用:

- 一个物理系统有限的旋转变换表示为 $R(\alpha, \beta, \gamma)$, 其对应的幺正算符为 $U[R]$

$$\begin{aligned} U[R(\alpha, \beta, \gamma)] &= e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \\ U[R_1, R_2] &= U[R_1]U[R_2] \end{aligned}$$

- $U[R(\alpha, \beta, \gamma)]$ 对应于操作, 对有固定坐标系的坐标系, 先绕z轴旋转 γ 角, 再绕y轴旋转 β 角, 再绕z轴旋转 α 角

- 幺正算符 $U[R(\alpha, \beta, \gamma)]$ 作用于一个特定的态矢 $|jm\rangle$ 上, 其结果相当于, 用基矢展开, 每个基矢对应的系数对应为变为该基矢的概率, 用 $D_{m'm}^j$ 函数表示

$$\begin{aligned} U[R(\alpha, \beta, \gamma)]|jm\rangle &= \sum_{j'm'} |j'm'\rangle \langle j'm'|U[R]|jm\rangle \\ &= \sum_{m'} |jm'\rangle \langle jm'|U[R]|jm\rangle \\ &= \sum_{m'} |jm'\rangle D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{m'm}^j(R(\alpha, \beta, \gamma)) &= \langle jm'|U[R]|jm\rangle \\ &= e^{-im'\alpha} \langle jm'|e^{-i\beta J_y}|jm\rangle e^{-im\gamma} \\ &= e^{-im'\alpha} d_{m'm}^j e^{-im\gamma} \end{aligned}$$

<https://arxiv.org/abs/1507.03414>

Relativistic One-Particle State

相对论单粒子态具有动量 \vec{p} , 可以通过对静止的单粒子态 $|jm\rangle$ 作用一个Lorentz变换得到. 有正则描述(canonical description)和螺旋度描述(helicity description)两种描述方式.

Lorentz transformation的知识回顾:

四动量和度规张量:

- 任意四动量可表示为:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p})$$

$$p_\mu = (p^0, -p^1, -p^2, -p^3) = (E, -p_x, -p_y, -p_z) = (E, -\vec{p})$$

- p^μ 和 p_μ 之间通过度规张量 $g^{\mu\nu}$ 相联系:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu$$

Lorentz变换矩阵 Λ_ν^μ :

$$g_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta = g_{\mu\nu}, \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 > 0$$

- Lorentz变换将四动量 p^μ 变换为 p'^μ

$$p'^\mu = \Lambda_\nu^\mu p^\nu$$

- Lorentz变换 $L_\nu^\mu(\vec{\beta})$ 包括沿 z 轴的纯 Lorentz boost $L_z(\beta)$ 及旋转变换 $R(\phi, \theta, 0)$:

$$L(\vec{\beta}) = R(\phi, \theta, 0) L_z(\beta) R^{-1}(\phi, \theta, 0)$$

其中 $R(\phi, \theta, 0)$ 代表将 z -axis 转向速度 $\vec{\beta}$ 方向, $R^{-1}(\phi, \theta, 0)$ 代表将转到 $\hat{\beta}$ 方向的 z 轴转回原方向

- Lorentz变换对应的么正算符为:

$$U[L(\vec{p})] = U[R(\phi, \theta, 0)] U[L_z(p)] U^{-1}[R(\phi, \theta, 0)]$$

旋转 $\hat{R}(\phi, \theta, 0)$ 将 z 轴转向立体角为 (θ, ϕ) 的 \vec{p} 动量方向: $\hat{p} = \hat{R}(\phi, \theta, 0) \hat{z}$

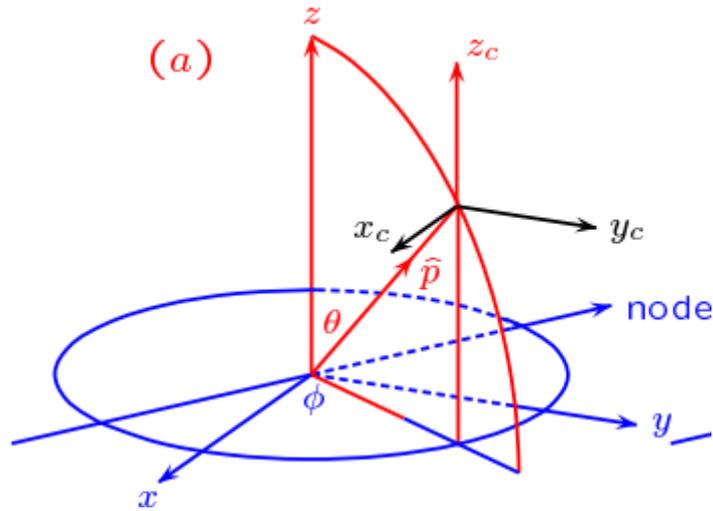
the canonical state

相对论单粒子态由静止的单粒子态经历 Lorentz 变换得到, 经历变换后, 静止粒子态获得动量 \vec{p}

$$|\vec{p}, jm\rangle = |\phi, \theta, p, jm\rangle = U[L(\vec{p})] |jm\rangle$$

$$= U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)] U[L_z(p)] U^{-1}[\hat{R}(\phi, \theta, 0)] |jm\rangle$$

- $|jm\rangle$ 是初始的静止粒子态, 其 z 方向的自旋分量 m 是在初始粒子静止系中的测量值, 而非粒子获得动量 \vec{p} 后的参考系中的测量值
- 在正则体系下, 坐标轴的方向是固定的, 不在 Lorentz 变化后发生变化, 即角动量的量子轴方向不发生变化



旋转变换作用到正则态上:

$$\begin{aligned}
 U[R]|\vec{p}, jm\rangle &= U[R](U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]U[L_z(p)]U^{-1}[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]|jm\rangle) \\
 &= U[R\hat{R}]U[L_z(p)]U^{-1}[R\hat{R}]U[R]|jm\rangle \\
 &= U[R\hat{R}]U[L_z(p)]U^{-1}[R\hat{R}]\sum_{m'} D_{m'm}^j(R)|jm\rangle \\
 &= \sum_{m'} D_{m'm}^j(R)|R\vec{p}, jm\rangle
 \end{aligned}$$

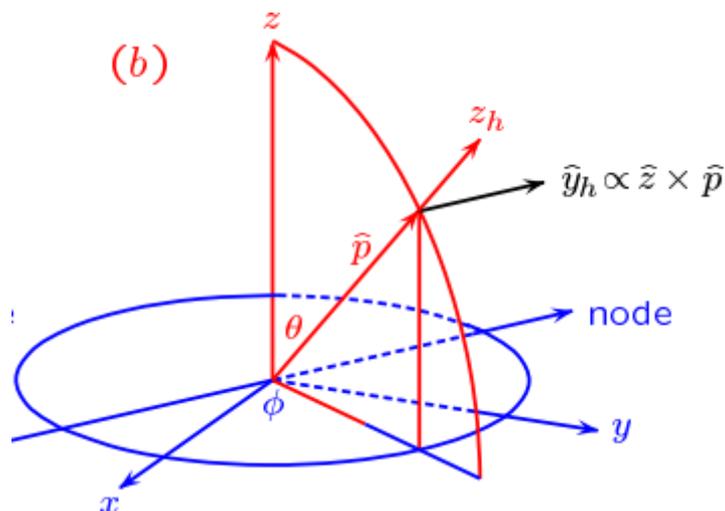
- 在旋转变换下, 总自旋量子数不变, 角动量的量子轴为z轴(始终为z轴), z轴方向有可能发生变化, 末态的角动量分量变为各个方向的自旋态的叠加
- 在旋转变换作用后, 动量方向也发生变化

the helicity state

除正则态外, 另一种描述相对论角动量粒子态的方法是螺旋态方法(helicity formalism). 在helicity体系下, 相对论粒子态也是由静止的粒子态经过Lorentz变换得到的:

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}, j\lambda\rangle &= |\phi, \theta, p, j\lambda\rangle = U[L(\vec{p})]U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]|j\lambda\rangle \\
 &= U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]U[L_z(\vec{p})]|j\lambda\rangle
 \end{aligned}$$

- λ 是helicity量子数, 是自旋沿动量方向的分量, 即动量方向为量子轴,
- 在旋转变换下, 量子轴(动量方向)发生变化, 因而螺旋度 λ 不变



Helicity态的构造:

- 初始态为静止态 $|j\lambda\rangle$, 初始态静止无动量, 角动量的量子轴为坐标轴 z 轴, 即在helicity体系下, 初始静止态和正则体系下的初始静止态一致
- 在做Lorentz变换时, 相对于正则体系下的变换行为, helicity体系下, 需要一个额外的步骤, 即将量子轴 z 轴方向转到动量方向
- 方式1: 旋转变换 $U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]$ 作用到静止态上, 将量子轴 z 轴方向转到动量的方向, 然后做一个boost, 使粒子态获得动量 \vec{p} ,
- 方式2: 静止态沿 z 轴做一个boost, 使粒子获得沿 z 轴的动量 $|\vec{p}|$, 然后做一个旋转 $U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]$, 将 z 轴转到动量方向上, 此时沿 z 轴的动量也变为了沿 \hat{p} 方向的动量

旋转变换作用到helicity态上

$$\begin{aligned} U[R]|\vec{p}, j\lambda\rangle &= U[R]U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]U[L(\vec{p})]|j\lambda\rangle \\ &= |R\vec{p}, j\lambda\rangle \end{aligned}$$

- 在旋转变换后, 量子轴方向, 即动量方向发生变化, 因而螺旋度 λ 不发生变化

正则量子态和helicity态之间的联系

$$\begin{aligned} |\vec{p}, j\lambda\rangle &= U[\hat{R}]U[L_z(\vec{p})]|j\lambda\rangle \\ &= U[\hat{R}]U[L_z(\vec{p})]U^{-1}[\hat{R}]U[\hat{R}]|j\lambda\rangle \\ &= \sum_m U[\hat{R}]U[L_z(\vec{p})]U^{-1}[\hat{R}]D_{m,\lambda}^j(\hat{R})|jm\rangle \\ &= \sum_m D_{m,\lambda}^j(\hat{R})|\vec{p}, jm\rangle \end{aligned}$$

Two-Particle States

- 考虑一个两粒子体系, 粒子1和粒子2分别有自旋 s_1, s_2 和质量 ω_1, ω_2
- 在两粒子的静止系即质心系中, 动量 \vec{p} 定义为粒子1的动量, 其方向为立体角 (ϕ, θ) , 粒子2的动量与粒子1方向相反

Construction of two-particle states in the canonical basis

正则体系下, 粒子1的单粒子态为 $|\vec{p}, s_1 m_1\rangle$, 粒子2的单粒子态为 $|\vec{-p}, s_2 m_2\rangle$

正则体系下, 两粒子体系的非耦合态形式为:

$$|\phi\theta m_1 m_2\rangle = aU[L(\vec{p})]|s_1 m_1\rangle U[L(\vec{-p})]|s_2 m_2\rangle$$

- 因为 s_1, s_2 是自旋角动量量子数, 对于一个粒子来说是确定值, 故略去不写
- 立体角 $\Omega = (\phi, \theta)$ 是粒子1的动量方向, 因为粒子1,2的动量大小相等, 方向相反, 故其方向对于描述粒子态更重要
- a 是非耦合态的归一化系数, $a = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{p}{\omega}}$, ω 是体系的有效质量

正则体系下, 两粒子体系的自旋耦合态形式为:

$$|\phi\theta s m_s\rangle = \sum_{m_1, m_2} |\phi\theta m_1 m_2\rangle \langle \phi\theta m_1 m_2 | \phi\theta s m_s\rangle$$

$\langle \phi\theta m_1 m_2 | \phi\theta s m_s\rangle = (s_1 m_1 s_2 m_2 | s m_s)$ 是Clebsch-Gordan(C-G)系数

耦合态在旋转变换下的特性和非相对论的单粒子态类似(将粒子系统视为一个更大的粒子, 则耦合态其实就是更大粒子系统的"单粒子态"):

$$U[R]|\Omega s m_s\rangle = \sum_{m'_s} D_{m'_s m_s}^s(R) |R\Omega, s m'_s\rangle$$

有固定轨道角动量的两粒子体系轨道自旋非耦合态为

$$|l m s m_s\rangle = \int d\Omega Y_m^l(\Omega) |\Omega s m_s\rangle$$

- 轨道角动量波函数用球谐函数表示

$$Y_m^l(\Omega) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^{l*}(\Omega)$$

- $d\Omega = d\phi d\cos\theta$ 是单位立体元, (但为什么要积分?)

在旋转变换下的行为

$$\begin{aligned} U[R]|l m s m_s\rangle &= \int d\Omega Y_m^l(\Omega) U[R]|\Omega s m_s\rangle \\ &= \sum_{m'_s} \int d\Omega Y_m^l(\Omega) D_{m'_s m_s}^s(R) |\Omega' s m'_s\rangle \end{aligned}$$

$$\Omega' = R\Omega = R'$$

又考虑球谐函数的性质:

$$\begin{aligned}
Y_m^l(\Omega) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^{l*}(\Omega) \\
&= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^{l*}(R^{-1}R') \\
&= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{m'} D_{mm'}^{l*}(R^{-1}) D_{m'0}^{l*}(R') \\
&= \sum_{m'} D_{mm'}^{l*}(R^{-1}) Y_{m'}^l(\Omega') \\
&= \sum_{m'} D_{m'm}^l(R) Y_{m'}^l(\Omega')
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
U[R]|lmsm_s\rangle &= \sum_{m'_s} \int d\Omega Y_m^l(\Omega) D_{m'_s m_s}^s(R) |\Omega' sm'_s\rangle \\
&= \sum_{m'_s} \sum_{m'} \int d\Omega' D_{m'm}^l(R) Y_{m'}^l(\Omega') D_{m'_s m_s}^s(R) |\Omega' sm'_s\rangle \\
&= \sum_{m'm'_s} D_{m'm}^l(R) D_{m'_s m_s}^s(R) |lm' sm'_s\rangle
\end{aligned}$$

在旋转变换下, 轨道自旋非耦合态同静止单粒子态类似, 变成非耦合态基矢的叠加态

两粒子体系轨道自旋耦合态为

$$\begin{aligned}
|JMls\rangle &= \sum_{mm_s} |lmsm_s\rangle \langle lmsm_s|JMls\rangle \\
&= \sum_{mm_s} (lmsm_s|JM)|lmsm_s\rangle
\end{aligned}$$

在旋转变换下:

$$U[R]|JMls\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J(R) |JM'ls\rangle$$

轨道自旋的耦合态相当于非相对论下的 $L-S$ 耦合, J, l, s 是旋转不变的

Construction of two-particle states in the helicity basis

Helicity 体系下的静止态为 $|j\lambda\rangle$, λ 代表螺旋度, 即自旋在动量方向上的分量, 非静止态为 $|\vec{p}, j\lambda\rangle$

helicity 体系下两粒子的自旋态为:

$$\begin{aligned}
|\Omega, \lambda_1 \lambda_2\rangle &= |\phi\theta, s_1 s_2 \lambda_1 \lambda_2\rangle = a U[\hat{R}] \{ U[L_z(\mathbf{p})] |s_1 \lambda_1\rangle U[L_{-z}(\mathbf{p})] |s_2 - \lambda_2\rangle \} \\
&= U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)] |00, s_1 s_2 \lambda_1 \lambda_2\rangle
\end{aligned}$$

两个单粒子态组合成两粒子体系的态矢量时, 需要考虑一个归一化的常数 a

$$a = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{p}{\omega}}$$

即

$$\begin{aligned}
|\Omega, \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= |\phi\theta, s_1 s_2 \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{p}{\omega}} |\vec{p}, s_1 \lambda_1 \rangle |-\vec{p}, s_2 \lambda_2 \rangle \\
&= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{p}{\omega}} |\vec{p}, s_1 \lambda_1; -\vec{p}, s_2 \lambda_2 \rangle
\end{aligned}$$

两粒子体系的总自旋态为:

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = N_J \int d\Omega D_{M\lambda}^{J*}(\Omega) |\Omega, \lambda_1 \lambda_2\rangle$$

$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ 是螺旋度的差值, $N_J = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$ 是归一化系数

Connection between canonical and helicity states

两粒子自旋态的联系:

$$\begin{aligned}
|\phi\theta\lambda_1\lambda_2\rangle &= aU[\hat{R}]\{U[L_z(p)]|s_1\lambda_1\rangle U[L_{-z}(p)]|s_2-\lambda_2\rangle\} \\
&= aU[L(\vec{p})]U[\hat{R}]|s_1\lambda_1\rangle U[L(p)]U[\hat{R}]|s_2-\lambda_2\rangle \\
&= a \sum_{m_1} D_{m_1\lambda_1}^{s_1}(\hat{R}) |\vec{p}, s_1 m_1\rangle \sum_{m_2} D_{m_2\lambda_2}^{s_2}(\hat{R}) |-\vec{p}, s_2 m_2\rangle \\
&= \sum_{m_1, m_2} D_{m_1\lambda_1}^{s_1}(\hat{R}) D_{m_2\lambda_2}^{s_2}(\hat{R}) |\Omega m_1 m_2\rangle \\
&= \sum_{m_1, m_2} D_{m_1\lambda_1}^{s_1}(\phi, \theta, 0) D_{m_2\lambda_2}^{s_2}(\phi, \theta, 0) |\phi, \theta, m_1 m_2\rangle
\end{aligned}$$

两粒子总角动量态函数的联系:

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{l_s} \left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1s_2-\lambda_2|s\lambda)|JMl_s\rangle$$

反过来,

$$\begin{aligned}
|JMl_s\rangle &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} |JM\lambda_1\lambda_2\rangle \langle JM\lambda_1\lambda_2|JMl_s\rangle \\
&= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} (l0s\lambda|J\lambda)(s_1\lambda_1s_2-\lambda_2|s\lambda)|JM\lambda_1\lambda_2\rangle
\end{aligned}$$

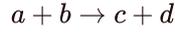
$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ 是螺旋度的差值

Decay Amplitude

The invariant transition amplitude for two-body reactions and the **partial-wave expansion** formula are derived in the helicity basis

S-matrix for two-body reactions

考虑两体反应:



粒子a的相应参数:

- 动量: \vec{p}
- 自旋: s_a
- 螺旋度: λ_a
- 内禀宇称: η_a
- 质心能量: ω_0 (即粒子a, b的不变质量)
- 质心系中的初动量: \vec{p}_i (粒子c在末态质心系中的动量为 \vec{p}_f)

此两体反应的不变 $S - matrix$ 矩阵元为:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c \lambda_c; \vec{p}_d \lambda_d | S | \vec{p}_a \lambda_a; \vec{p}_b \lambda_b \rangle &= \langle \vec{p}_f \lambda_c; -\vec{p}_f \lambda_d | S | \vec{p}_i \lambda_a; -\vec{p}_i \lambda_b \rangle \\ &= (4\pi)^2 \frac{\omega_0}{\sqrt{p_f p_i}} \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | S | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \end{aligned}$$

初态的动量 \vec{p}_i 的方向设为(0,0),末态的动量 \vec{p}_f 方向设为 $\Omega_0 = (\phi_0, \theta_0)$,
 $(4\pi)^2 \frac{\omega_0}{\sqrt{p_f p_i}}$ 来自于两粒子体系态矢量展开为单粒子态时引入的归一化常数

初末态能动量守恒要求:

$$\langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | S | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_c + p_d - p_a - p_b) \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | S(\omega_0) | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle$$

由S可以得到T的定义: $S = 1 + iT$, 1代表初末态一致的反应情形, T项代表初末态不一致的跃迁(反应, transition)过程

由不变 $S - matrix$ element可以得到不变跃迁振幅 **invariant transition amplitude** \mathcal{M}_{fi} :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c \lambda_c; \vec{p}_d \lambda_d | T | \vec{p}_a \lambda_a; \vec{p}_b \lambda_b \rangle &= \langle \vec{p}_f \lambda_c; -\vec{p}_f \lambda_d | T | \vec{p}_i \lambda_a; -\vec{p}_i \lambda_b \rangle \\ &= (4\pi)^2 \frac{\omega_0}{\sqrt{p_f p_i}} \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | T | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_c + p_d - p_a - p_b) \\ &\cdot (4\pi)^2 \frac{\omega_0}{\sqrt{p_f p_i}} \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | T(\omega_0) | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_c + p_d - p_a - p_b) \cdot \mathcal{M}_{fi} \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{M}_{fi} = (4\pi)^2 \frac{\omega_0}{\sqrt{p_f p_i}} \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | T(\omega_0) | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle$$

invariant transition amplitude \mathcal{M}_{fi} 用分波振幅(**partial-wave amplitude**)展开

$$\langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle = \sum_{JM} \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | JM \lambda_c \lambda_d \rangle \langle JM \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | JM \lambda_a \lambda_b \rangle \\ \times \langle JM \lambda_a \lambda_b | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle$$

对于两体反应, 初末态都是两粒子体系, 因而初末态都用两粒子自旋态表示

考虑到,

$$\langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | JM \lambda'_c \lambda'_d \rangle = N_J \int d\Omega' D_{M\lambda'}^{J*}(\Omega') \langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | \Omega', \lambda'_c \lambda'_d \rangle \\ = N_J \int d\Omega' D_{M\lambda'}^{J*}(\Omega') \delta(\Omega' - \Omega_0) \delta(\lambda'_c - \lambda_c) \delta(\lambda'_d - \lambda_d) \\ = N_J D_{M\lambda}^{J*}(\Omega_0) \delta(\lambda'_c - \lambda_c) \delta(\lambda'_d - \lambda_d)$$

以及

$$\langle 00, \lambda_a \lambda_b | JM \lambda_a \lambda_b \rangle = N_J \delta_{M\lambda'}$$

因而有

$$\langle \Omega_0 \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | 00 \lambda_a \lambda_b \rangle = \sum_{JM} N_J D_{M\lambda}^{J*}(\Omega_0) N_J D_{M\lambda'}^{J*}(0) \langle JM \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | JM \lambda_a \lambda_b \rangle \\ = \sum_J \frac{1}{4\pi} (2J+1) \left(\sum_M D_{M\lambda}^{J*}(\Omega_0) \delta_{M\lambda'} \langle JM \lambda_c \lambda_d | T(w_0) | JM \lambda_a \lambda_b \rangle \right) \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) \langle \lambda_c \lambda_d | T^J(w_0) | \lambda_a \lambda_b \rangle D_{\lambda\lambda'}^{J*}(\phi_0, \theta_0, 0)$$

其中 $\lambda = \lambda_c - \lambda_d, \lambda' = \lambda_a - \lambda_b, M = \lambda'$

对于确定 **helicity** 的反应, 反应的微分截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = \frac{p_f}{p_i} \left| \frac{\mathcal{M}_{fi}}{8\pi\omega_0} \right|^2$$

以散射振幅(**scattering amplitude**)的形式表示微分截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_0} = |f(\Omega_0)|^2 \\ f(\Omega_0) = \frac{(p_f/p_i)^{1/2}}{8\pi\omega_0} \mathcal{M}_{fi} \\ = \frac{1}{p_i} \sum_J \left(J + \frac{1}{2} \right) \langle \lambda_c \lambda_d | T^J(w_0) | \lambda_a \lambda_b \rangle D_{\lambda\lambda'}^{J*}(\phi_0, \theta_0, 0)$$

两体衰变

考虑一个共振态衰变为两个粒子的过程: $J \rightarrow 1 + 2$

- 共振态J的自旋宇称为 J^n , 质量为 ω
- 粒子1(2)的自旋为 $s_1(s_2)$, 内禀宇称为 $\eta_1(\eta_2)$
- 在共振态J的静止系(**rest frame of resonance J, JRF**)中考虑反应, JRF也即粒子1,2的质心系
- 粒子1有动量 \vec{p} , 其方向为 $\Omega = (\theta, \phi)$
- 共振态初态为 $|JM\rangle$, 自旋为 J , z -轴分量为 M , 粒子1,2末态为 $|\vec{p}, \lambda_1\rangle, |-\vec{p}, \lambda_2\rangle$, 螺旋度分别为 λ_1, λ_2

初态 $|JM\rangle$ 衰变为末态 $|\vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2\rangle$ 的振幅为:

$$\begin{aligned}
A &= \langle \vec{p}, \lambda_1; -\vec{p}, \lambda_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \langle \Omega \lambda_1 \lambda_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \sum_{\lambda'_1, \lambda'_2} \langle \Omega \lambda_1 \lambda_2 | JM \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle \langle JM \lambda'_1 \lambda'_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} N_J D_{M\lambda}^{J*}(\Omega) \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= N_J D_{M\lambda}^{J*}(\Omega) F_{\lambda_1 \lambda_2}^J
\end{aligned}$$

- $N_J = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$ 是归一化系数
- $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ 是末态两粒子的helicity的差值
- \mathcal{M} 是旋转不变的衰变算符
- $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 是螺旋度衰变振幅(helicity decay amplitude), 仅仅依赖于旋转不变量 $J, \lambda_1 \lambda_2$

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^J = 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | \mathcal{M} | JM \rangle$$

用分波展开helicity 衰变振幅 $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$

考虑到helicity机制和正则机制下,总角动量态的关系,有

$$\langle JM \lambda_1 \lambda_2 | JM l s \rangle = \left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{1/2} (l0s\lambda | J\lambda) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda)$$

因而有

$$\begin{aligned}
F_{\lambda_1 \lambda_2}^J &= 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \sum_{l s} \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | JM l s \rangle \langle JM l s | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= \sum_{l s} \left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{1/2} (l0s\lambda | J\lambda) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda) 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \langle JM l s | \mathcal{M} | JM \rangle \\
&= \sum_{l s} \left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{1/2} g_{l s}^J (l0s\lambda | J\lambda) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda)
\end{aligned}$$

- $g_{l s}^J = 4\pi \left(\frac{\omega}{p}\right)^{1/2} \langle JM l s | \mathcal{M} | JM \rangle$ 是(L-S耦合)分波振幅(partial wave amplitude), 即正则体系下的不变衰变振幅形式

实际应用中, helicity振幅分波展开时, 还需考虑势垒因子(barrier factor)的贡献

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^J = \sum_{l s} \left(\frac{2l+1}{2J+1}\right)^{1/2} (l0s\lambda | J\lambda) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s\lambda) g_{l s}^J r^l B_l(r)$$

- r^l 是barrier factor
- $B_l(r)$ 是Blatt-Weisskopf (BW) barrier factor
- $r^l B_l(r)$ 是实际中使用的势垒因子形式
- 轨道角动量 l 的存在需要在公式中引入barrier factor, 以确保 *the amplitudes are singularity-free at the threshold*
- 实际的实验中, (L-S耦合)分波振幅 $g_{l s}^J$ 是需要拟合确定的一个复参数

正则体系下和helicity体系下, 不变振幅 $a_{l s}^J$ 和 $F_{\lambda_1 \lambda_2}^J$ 存在关系:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |F_{\lambda_1 \lambda_2}^J|^2 = \sum_{l_s} |g_{l_s}^J|^2$$

如果反应过程宇称守恒(一般情况下都需要满足),则有:

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^J = \eta \eta_1 \eta_2 (-1)^{J-s_1-s_2} F_{-\lambda_1 -\lambda_2}^J$$

- η 是初态的宇称, η_1, η_2 是末态的宇称

级联衰变(sequential decays)

在Helicity的框架下,对于级联衰变的处理很自然,因为每一级的自旋部分(角度部分)和能量部分被清晰的分开,且每一级都是在母粒子质心系中处理的,是相互独立的.

因而,在构造总振幅时,只需写出各级衰变振幅,然后用共振态的BW传播子联系起来即可

Helicity angle and frame rotation ²

根据isobar模型, 级联衰变的各步过程都认为是两体衰变, 不同的两体衰变其反应平面各异, 因而需要额外考虑各反应平面间的关系.

考虑级联衰变:



一些基本量的约定和符号的约定:

- $(x_0^{\{A\}}, y_0^{\{A\}}, z_0^{\{A\}})$: 初始母粒子 A 的静止系
 - 上标 $\{A\}$ 代表在 A 的静止系中
 - \hat{z} 方向为母粒子 A 的自旋量子化轴的方向
- \vec{p}_B^A : 动量的表示, 以粒子 B 为例, 表示为粒子 B 在母粒子 A 的静止系中的动量
- $R(\alpha, \beta, \gamma)$: 使用Eular角表示的旋转变换
 - 以初始坐标系 $(x_0^{\{A\}}, y_0^{\{A\}}, z_0^{\{A\}})$ 经过旋转变换 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 为例
 - 步骤一: 首先沿着 z 轴旋转 α 角, 得到坐标系 $(x_1^{\{A\}}, y_1^{\{A\}}, z_1^{\{A\}})$
 - 步骤二: 然后再沿着 y 轴(此时的 y 轴是经过步骤一的 y_1 轴)旋转 β 角. 得到坐标系 $(x_2^{\{A\}}, y_2^{\{A\}}, z_2^{\{A\}})$
 - 步骤三: 最后沿着 z 轴(经过步骤二后的 z 轴, 即 z_2 轴)旋转 γ , 得到坐标系 $(x_3^{\{A\}}, y_3^{\{A\}}, z_3^{\{A\}})$
- 立体角 $(\phi_B^{\{A\}}, \theta_B^{\{A\}}, 0)$: 粒子 B 在粒子 A 的静止系中的动量方向
 - $\phi_B^{\{A\}}$: azimuthal angle, 方位角
 - $\theta_B^{\{A\}}$: polar angle, 极角

helicity机制下坐标系的变换

Helicity: helicity定义为粒子自旋在其动量方向上的投影

- 当 z 轴方向与粒子动量方向相一致时, 自旋在其上的投影(也即 m_z 量子数)表示为 λ

为了使用helicity机制,

- 初始母粒子 A 的衰变链, 坐标系方向的选择可以是任意的, 一旦选定, 必须在后续所有反应中及操作中保持一致
- 次级粒子 B 的衰变链, 坐标系必须旋转到 z 轴方向和粒子 B 的动量方向相同
 - 使用旋转, 旋转的角度为 $\alpha = \phi_B^{\{A\}}, \beta = \theta_B^{\{A\}}$,
 - 经过旋转变换 $R(\phi_B^{\{A\}}, \theta_B^{\{A\}}, 0)$ 后, 得到坐标系 $(x_0^{\{B\}}, y_0^{\{B\}}, z_0^{\{B\}}) = (x_3^{\{A\}}, y_3^{\{A\}}, z_3^{\{A\}})$, 即旋转后的"3"坐标系即为粒子 B 的静止系, 也即从粒子 B 开始的衰变链的初态"0"坐标系
 - 旋转变换后, 所有其余粒子的四动量沿 B 的动量方向做一Lorentz boost, 使得其四动量变为 B 的静止系下的值
 - 对于 B 静止系的 z 轴方向, 即 $\hat{z}_0^{\{B\}}$ 方向, 有两种确定方式:

- $\hat{z}_0^{\{B\}} = \hat{z}_3^{\{A\}} = \hat{p}_B^{\{A\}}$: 通过A静止系中B的动量方向确定
- $\hat{z}_0^{\{B\}} = -\hat{p}_C^{\{B\}}$: 由于A静止系中, B, C粒子背靠背动量方向相反, 故可通过C的动量方向确定
- 若C粒子有后续衰变, 重复对B粒子坐标系的处理即可

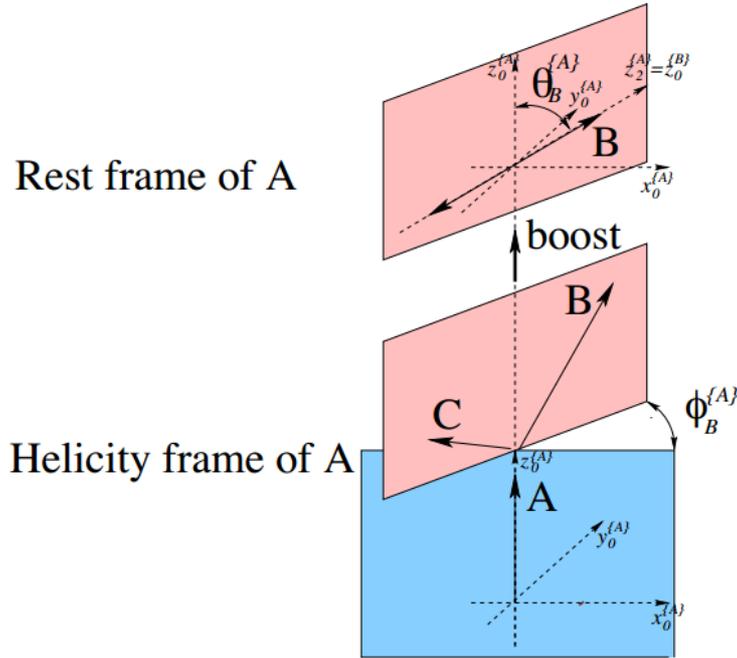


Figure 6: Coordinate axes for the spin quantization of particle A (bottom part), chosen to be the helicity frame of A ($\hat{z}_0 \parallel \vec{p}_A$ in the rest frame of its mother particle or in the laboratory frame), together with the polar ($\theta_B^{\{A\}}$) and azimuthal ($\phi_B^{\{A\}}$) angles of the momentum of its daughter B in the A rest frame (top part). Notice that the directions of these coordinate axes, denoted as $\hat{x}_0^{\{A\}}$, $\hat{y}_0^{\{A\}}$, and $\hat{z}_0^{\{A\}}$, do not change when boosting from the helicity frame of A to its rest frame. After the Euler rotation $\mathcal{R}(\alpha = \phi_B^{\{A\}}, \beta = \theta_B^{\{A\}}, \gamma = 0)$ (see the text), the rotated z axis, $\hat{z}_2^{\{A\}}$, is aligned with the B momentum; thus the rotated coordinates become the helicity frame of B. If B has a sequential decay, then the same boost-rotation process is repeated to define the helicity frame for its daughters.

- 在B粒子的静止系中, z轴方向与B动量方向相同, 此时z轴方向为B的量子化轴方向, -z轴方向为C的量子化轴方向, 由于角动量守恒, 因而有 $m'_A = m'_B + m'_C = \lambda_B - \lambda$

以 $\Lambda_b^0 \rightarrow \psi K^- p$ 为例

粒子 Λ_b^0 的两个衰变道:

- $\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda^* \psi, \Lambda^* \rightarrow K^- p, \psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$
- $\Lambda_b^0 \rightarrow P_c^+ K^-, P_c^+ \rightarrow \psi p, \psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$
- 两个衰变道来自相同的初始粒子, 有相同的末态粒子, 存在干涉, 用末态粒子的四动量信息计算得到的振幅信息, 是两个道的 coherent summation

Λ^* decay chain 振幅

衰变道: $\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_n^* \psi, \Lambda_n^* \rightarrow K^- p, \psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$

- Λ_n^* : 代表 Λ 粒子所有可能的激发态
- 不同的 n 所代表的激发态的衰变过程, 应 add coherently

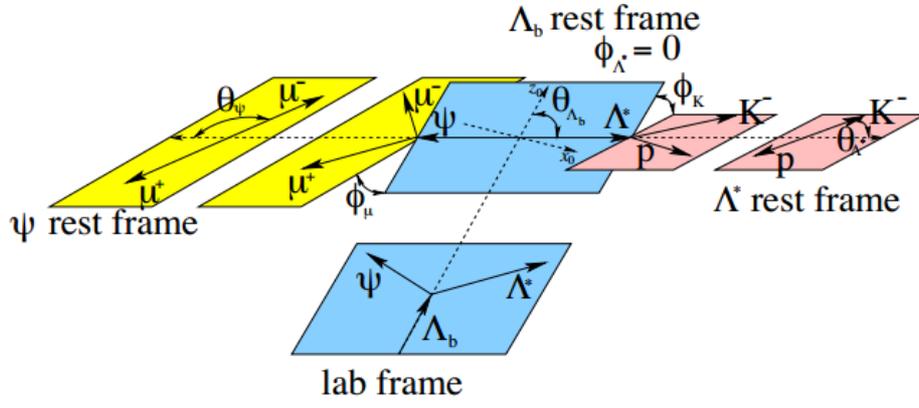


Figure 7: Definition of the decay angles in the Λ^* decay chain.

$\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_n^* \psi$ 过程的不变振幅:

$$A \sim F_{\lambda_{\Lambda^*}, \lambda_{\psi}}^{J_{\Lambda_b^0}} D_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_{\Lambda^*} - \lambda_{\psi}}^{J_{\Lambda_b^0}^*} (\Omega_{\Lambda^*}^{\{\Lambda_b^0\}})$$

- $F_{\lambda_{\Lambda^*}, \lambda_{\psi}}^{J_{\Lambda_b^0}}$ 是helicity coupling amplitude
- $D_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_{\Lambda^*} - \lambda_{\psi}}^{J_{\Lambda_b^0}^*} (\Omega_{\Lambda^*}^{\{\Lambda_b^0\}})$ 是描述角度部分的D-function
- $\Omega_{\Lambda^*}^{\{\Lambda_b^0\}}$ 是 Λ^* 在 Λ_b^0 静止系中的动量立体角方向
- 选择 Λ_b^0 在实验室系的动量方向为 $\hat{z}_0^{\{\Lambda_b^0\}}$ 方向即 $\hat{z}_0^{\{\Lambda_b^0\}} = \hat{p}_{\Lambda_b^0}^{\{lab\}}$, 在此方向上的自旋投影为helicity $\lambda_{\Lambda_b^0}$
- 不同 $\lambda_{\Lambda_b^0}$ 值的项需要add incoherently
- 在 $\Lambda_b^0 \rightarrow \Lambda_n^* \psi$ 的衰变平面上建立坐标系, 使得 Λ^* 的运动方向在平面上, 即通过 Λ_b^0 的运动方向和 Λ^* 的运动方向来确定一个平面, 在其上建立坐标系, 使得坐标系的y轴方向垂直于该平面

$\Lambda_n^* \rightarrow Kp$ 过程的不变振幅:

$$A \sim F_{\lambda_p, \lambda_K}^{J_{\Lambda_n^*}} D_{\lambda_{\Lambda_n^*}, \lambda_p - \lambda_K}^{J_{\Lambda_n^*}^*} (\Omega_K^{\{\Lambda_n^*\}}) R_{\Lambda_n^*}(m_{Kp})$$

- $\Omega_K^{\{\Lambda_n^*\}}$ 是 K 在 Λ_n^* 静止系中动量方向的立体角
- K 粒子是无自旋的粒子, 故应有 $\lambda_K = 0$
- $R_{\Lambda_n^*}(m_{Kp})$ 用来描述在kaon-proton系统的不变质量谱中出现的 Λ_n^* 共振态:

$$R_{\Lambda_n^*}(m_{Kp}) = B_{L_{\Lambda_b^0}^{\Lambda_n^*}}(p, p_0, d) \left(\frac{p}{M_{\Lambda_b^0}} \right)^{L_{\Lambda_b^0}^{\Lambda_n^*}} \text{BW}(m_{Kp} | M_0^{\Lambda_n^*}, \Gamma_0^{\Lambda_n^*}) B_{L_{\Lambda_n^*}}(q, q_0, d) \left(\frac{q}{M_0^{\Lambda_n^*}} \right)^{L_{\Lambda_n^*}}$$

- $L_{\Lambda_b^0}^{\Lambda_n^*}$: 在 Λ_b^0 衰变过程中, Λ^* 和 ψ 间的轨道角动量

$\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 过程的振幅:

$$D_{\lambda_{\psi}, \Delta \lambda_{\mu}}^{J_{\psi}^*} (\Omega_{\mu}^{\{\psi\}})$$

- 在 ψ 的静止系中, 两个 μ 粒子背靠背运动, 故其helicity是相互关联的, 只能取一正一负
- 此项振幅中, 没有helicity coupling amplitude F , 是因为C和P宇称守恒, 因而helicity振幅 F 都相等, 因而可以将其值设为unity, 其magnitude和phase都吸收到其他的helicity振幅中
- $\Omega_{\mu}^{\{\psi\}}$: μ 粒子在 ψ 静止系中的动量方向立体角

有中间共振态 Λ_n^* 的整条衰变链的振幅:

$$\mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p, \Delta\lambda_\mu}^{\Lambda_n^*} = \sum_n F_{\lambda_{\Lambda_n^*}, \lambda_\psi}^{J_{\Lambda_b^0}} D_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_{\Lambda_n^*}, -\lambda_\psi}^{J_{\Lambda_b^0}^*} (\Omega_{\Lambda_n^*}^{\{\Lambda_b^0\}}) \cdot \sum_{\lambda_{\Lambda_n^*}} F_{\lambda_p, \lambda_K}^{J_{\Lambda_n^*}} D_{\lambda_{\Lambda_n^*}, \lambda_p, -\lambda_K}^{J_{\Lambda_n^*}^*} (\Omega_K^{\{\Lambda_n^*\}}) R_{\Lambda_n^*} (m_{Kp}) \cdot \sum_{\lambda_\psi} D_{\lambda_p, \Delta\lambda_\mu}^{J_{\psi^*}} (\Omega_\mu^{\{\psi\}})$$

- $\mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p, \Delta\lambda_\mu}^{\Lambda_n^*}$: 表示具有确定helicity $\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p, \Delta\lambda_\mu$ 的过程的振幅, 在最后考虑总的振幅时, 还需对这些helicity求和

$$|\mathcal{M}^{\Lambda_n^*}|^2 = \frac{1 + P_{\Lambda_b^0}^{\Lambda_n^*}}{2} \sum_{\lambda_p} \sum_{\Delta\lambda_\mu} \left| \mathcal{M}_{(\lambda_{\Lambda_b^0}=+1/2), \lambda_p, \Delta\lambda_\mu} \right|^2 + \frac{1 - P_{\Lambda_b^0}^{\Lambda_n^*}}{2} \sum_{\lambda_p} \sum_{\Delta\lambda_\mu} \left| \mathcal{M}_{(\lambda_{\Lambda_b^0}=-1/2), \lambda_p, \Delta\lambda_\mu} \right|^2$$

- $P_{\Lambda_b^0}^{\Lambda_n^*}$: 代表 Λ_b^0 的极化度, 定义为 $\lambda_{\Lambda_b^0}$ 取不同值的概率差别, 若无极化则取为0

P_c^+ decay chain的振幅

衰变道: $\Lambda_b^0 \rightarrow P_{cj} K^-, P_{cj} \rightarrow \psi p, \psi \rightarrow \mu^- \mu^-$

- P_{cj} : 代表所有可能的含c夸克的五夸克态(pentaquark state)
- $j = 1, 2, \dots$: 不同j代表不同的 P_c

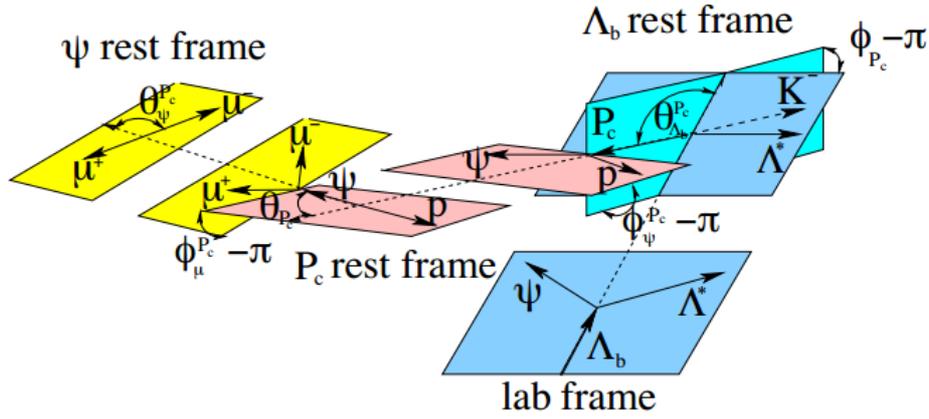


Figure 8: Definition of the decay angles in the P_c^+ decay chain.

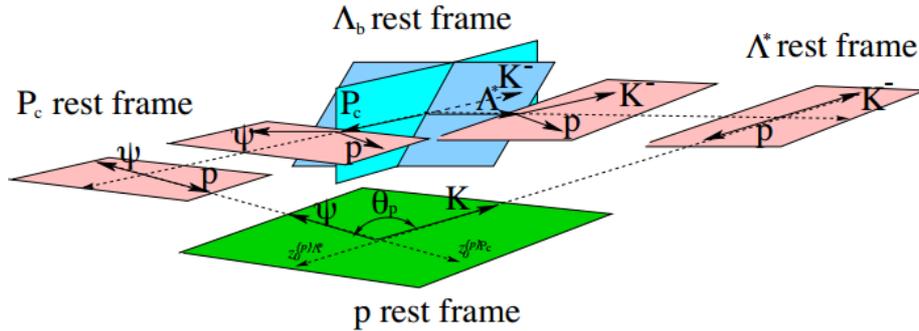


Figure 9: Definition of the θ_p angle.

$\Lambda_b^0 \rightarrow P_{cj} K^-$ 过程的振幅:

$$A \sim F_{\lambda_{P_c}, \lambda_K}^{J_{\Lambda_b^0}} D_{\lambda_b^0, \lambda_{P_c}, -\lambda_K}^{J_{\Lambda_b^0}^*} (\Omega_{P_c}^{\{\Lambda_b^0\}})$$

- $\Omega_{P_c}^{\{\Lambda_b^0\}}$: Λ_b^0 静止系中 P_c 的动量方向的立体角
- $\lambda_K = 0$: K 的自旋为0, 故其helicity为0

$P_{cj} \rightarrow \psi p$ 过程的振幅

$$A \sim F_{\lambda_\psi^{P_c}, \lambda_p^{P_c}}^{J_{P_{cj}}} D_{\lambda_{P_c}, \lambda_\psi^{P_c} - \lambda_p^{P_c}}^{J_{P_{cj}}} (\Omega_\psi^{\{P_c\}}) R_{P_{cj}}(m_{\psi p})$$

- $\Omega_\psi^{\{P_c\}}$: P_c 静止系中 ψ 的动量方向立体角
- $R_{P_{cj}}(m_{\psi p})$: 用以描述 ψ, p 质量谱中的 P_{cj} 共振态
- $\lambda_\psi^{P_c}, \lambda_p^{P_c}$: 涉及 P_c 的衰变链中 ψ 和 p 的helicity, 上标 P_c 用来区分 P_{cj} 分涉及 Λ^* 的过程中 ψ 和 p 的helicity
- ψ 是中间态(末态为muon pair), 在计算振幅时会对 $\lambda_\psi^{P_c}$ 的所有取值求和, 因而在把含 P_{cj} 过程的振幅和含 Λ_n^* 过程振幅求和时, 在不同过程中对 $\lambda_\psi^{P_c}$ 求和对振幅无影响
- K 是末态粒子, 但其自旋为0, 故其helicity可以不用考虑
- p 是末态粒子且其自旋不为0, 故需要考虑两个不同衰变链中 p 的helicity态的联系:
 - 在有 Λ^* 过程中, 在 Λ^* 的静止系中考虑 p , 其动量方向(量子轴方向)反平行于 K
 - 在有 P_{cj} 过程中, 在 P_{cj} 的静止系中考虑 p , 其动量方向(量子轴方向)反平行于 ψ
 - 两个过程中 p 的量子轴的方向存在一个夹角 θ_p , 可以通过boost到 p 的静止系中, 求 K 和 ψ 的夹角来得到 θ_p
 - 不同过程中 p 的量子轴的方向差别只有极角(polar angle)差别 θ_p , 其原因在于 Λ^* 和 P_{cj} 的衰变平面相同:
 - 以初态粒子 Λ_b^0 的动量方向为初始 z 轴方向, boost到 Λ_b^0 的静止系后, 在 z 方向上总动量为0, 只在 $x-y$ 平面上有动量大小, 即此时末态粒子(伪)在 $x-y$ 平面上运动
 - 末态粒子(伪)在 $x-y$ 平面上运动, (K, p) 构成 Λ^* 的衰变平面, (ψ, p) 构成 P_{cj} 的衰变平面, 由于三个粒子在同一平面上, 故 Λ^* 和 P_{cj} 的衰变平面重叠, 是同一个平面
 - 来自 Λ^* 的 p 的helicity态 $|\lambda_p\rangle$ 和来自 P_{cj} 的 p 的helicity态 $|\lambda_p^{P_c}\rangle$ 之间存在一个旋转变换的关系:

$$|\lambda_p\rangle = \sum_{\lambda_p^{P_c}} D_{\lambda_p^{P_c}, \lambda_p}^{J_p} (0, \theta_p, 0)^* |\lambda_p^{P_c}\rangle = \sum_{\lambda_p^{P_c}} d_{\lambda_p^{P_c}, \lambda_p}^{J_p} (\theta_p) |\lambda_p^{P_c}\rangle$$

- 以 Λ^* 的过程为基准, 含 P_{cj} 过程的振幅将会引入额外的求和参数

$$\sum_{\lambda_p^{P_c}} d_{\lambda_p^{P_c}, \lambda_p}^{J_p} (\theta_p)$$

$\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 过程的振幅

$$D_{\lambda_\psi^{P_c}, \Delta \lambda_\mu^{P_c}}^{J_\psi^*} (\Omega_\mu^{\{\psi\}})$$

- muon pair 是末态粒子, 其helicity态需要和 p 一样, 旋转到 Λ^* 过程的helicity态上
- 由于muon pair是在 ψ 的静止系中考虑的, 无论之前做了什么变化, 不同过程中muon的量子轴方向相同, 即无极角的差别 $\theta_p = 0$
 - 无极角差别, 导致 $d_{\lambda_\mu^{P_c}, \lambda_\mu}^{J_p} (0) = \delta_{\lambda_\mu^{P_c}, \lambda_\mu}$

• **helicity** λ 相同, 但不意味着**helicity**态相同

- 由于得到 ψ 静止系之前的变换操作, 有可能使得不同过程中 ψ 的衰变平面不同, 即存在方位角(azimuthal angle) α_μ 的差别
- 两个decay chain的muon量子态同样通过一个旋转变换联系, 从而引入系数:

$$\sum_{\lambda_\mu^{P_c}} D_{\lambda_\mu^{P_c} \lambda_\mu}^{J_\mu} (\alpha_\mu, 0, 0)^* = \sum_{\lambda_\mu^{P_c}} e^{i\lambda_\mu^{P_c} \alpha_\mu} \delta_{\lambda_\mu^{P_c}, \lambda_\mu} = e^{i\lambda_\mu \alpha_\mu}$$

- 由于两个muon都需要经过旋转变换, 故一对muon pair将在振幅中引入系数:

$$e^{i\lambda_\mu \alpha_\mu} e^{i\lambda_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\mu}}} = e^{i(\lambda_\mu - \lambda_{\bar{\mu}}) \alpha_\mu} = e^{i\Delta\lambda_\mu \alpha_\mu}$$

考虑系数后, 此过程的振幅为:

$$D_{\lambda_\psi^{P_c}, \Delta\lambda_\mu}^{J_\psi^*} (\Omega_\mu^{\{\psi\}}) e^{i\Delta\lambda_\mu \alpha_\mu}$$

有中间共振态 P_{cj} 的整条衰变链的振幅:

$$\mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p^{P_c}, \Delta\lambda_\mu^{P_c}}^{P_c} = \sum_j F_{\lambda_{P_c}, \lambda_K}^{J_{\Lambda_b^0}} D_{\lambda_b^0, \lambda_{P_c} - \lambda_K}^{J_{\Lambda_b^0}} (\Omega_{P_c}^{\{\Lambda_b^0\}}) \cdot \sum_{\lambda_{P_c}} F_{\lambda_\psi^{P_c}, \lambda_p^{P_c}}^{J_{P_{cj}}} D_{\lambda_{P_c}, \lambda_\psi^{P_c} - \lambda_p^{P_c}}^{J_{P_{cj}}} (\Omega_{\psi}^{\{P_c\}}) R_{P_{cj}}(m_{\psi p}) \cdot \sum_{\lambda_\psi^{P_c}} D_{\lambda_\psi^{P_c}, \Delta\lambda_\mu}^{J_\psi^*} (\Omega_\mu^{\{\psi\}})$$

- $\mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p^{P_c}, \Delta\lambda_\mu^{P_c}}^{P_c}$: 经过 P_{cj} 的过程, 具有确定helicity $\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p^{P_c}, \Delta\lambda_\mu^{P_c}$ 的振幅, 还需对这些helicity求和
- 由于, 以含 Λ^* 过程为基准, 含 P_c 的过程, p和muon pair的helicity态需要考虑额外的旋转变换

$$|\mathcal{M}^{P_{cj}}|^2 = \sum_{\lambda_{\Lambda_b^0}} \sum_{\lambda_p} \sum_{\Delta\lambda_\mu} |e^{i\Delta\lambda_\mu \alpha_\mu} \sum_{\lambda_p^{P_c}} d_{\lambda_p^{P_c}, \lambda_p}^{J_p} (\theta_p) \mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p^{P_c}, \Delta\lambda_\mu^{P_c}}^{P_c}|^2$$

考虑所有衰变过程的总不变振幅为:

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{\lambda_{\Lambda_b^0}} \sum_{\lambda_p} \sum_{\Delta\lambda_\mu} |\mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p, \Delta\lambda_\mu}^{\Lambda^*} + e^{i\Delta\lambda_\mu \alpha_\mu} \sum_{\lambda_p^{P_c}} d_{\lambda_p^{P_c}, \lambda_p}^{J_p} (\theta_p) \mathcal{M}_{\lambda_{\Lambda_b^0}, \lambda_p^{P_c}, \Delta\lambda_\mu^{P_c}}^{P_c}|^2$$

Amplitude analysis of process $Y \rightarrow \psi(3683)\pi^+\pi^-$

初态为来自 e^+e^- 的charmonium Y-state, 末态为 $\psi(3686), \pi^+\pi^-$ 粒子, 可能的衰变过程(为简便, 将 $\psi(3686)$ 简写为 ψ):

- $Y \rightarrow Z_c^\pm \pi^\mp, Z_c^\pm \rightarrow \psi(3683)\pi^\pm$: 中间共振态为 Z_c , Z_c 衰变为 $\psi\pi$, Z_c 有正负, 故此过程实际上是两个过程
- $Y \rightarrow R_n \psi(3686), R_n \rightarrow \pi^+\pi^-$: 中间共振态为 R_n , R_n 衰变为 $\pi^+\pi^-$ (主要是S-wave的贡献), 可能有多种共振态衰变到 $\pi^+\pi^-$

Amplitude construction

- 在helicity 机制下构造 $\psi\pi^+\pi^-$ 末态的振幅
- 符号约定按照前面的规则

Decay sequence: $Y \rightarrow Z_c^\pm \pi^\mp, Z_c^\pm \rightarrow \psi(3683)\pi^\pm$

Amplitude of process $Y \rightarrow Z_c \pi$

$$\mathcal{A}_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\pi}^{J_Y} = F_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\pi}^{J_Y} D_{\lambda_Y, \lambda_{Z_c} - \lambda_\pi}^{J_Y*} (\Omega_{Z_c}^{\{Y\}})$$

- 在Y的静止系中考虑这个过程
- $\mathcal{A}_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\pi}^{J_Y}$: 来自具有确定helicity 的Y粒子的过程(在和含R过程一起构造总振幅时, 会对Y的helicity求和), 依赖 λ_{Z_c} 和 λ_π 的振幅
- $\Omega_{Z_c}^{\{Y\}}$: 在Y静止系中 Z_c 的运动方向的立体角
- Y-state 通过虚光子来自于 e^+e^- , 其量子数为 $J^{PC} = 1^{--}$
- pion的量子数为 $J^P = 1^1$, 故其helicity $\lambda_\pi = 0$

Amplitude of process $Z_c \rightarrow \psi\pi$

$$\mathcal{A}_{\lambda_\psi, \lambda_\pi}^{J_{Z_c}} = F_{\lambda_\psi, \lambda_\pi}^{J_{Z_c}} D_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\psi - \lambda_\pi}^{J_{Z_c}*} (\Omega_\psi^{\{Z_c\}})$$

- 在 Z_c 的静止系中考虑这个过程
- $\mathcal{A}_{\lambda_\psi, \lambda_\pi}^{J_{Z_c}}$: 具有确定helicity的 Z_c 的衰变过程的振幅, 依赖于 $\lambda_\psi, \lambda_\pi$
- $\lambda_\psi^{Z_c}$: 在 Z_c 静止系中的 ψ 的helicity, 上标 Z_c 是为了区分于后面含 R_n 的过程, 因为以含 R_n 的过程为基准更方便

整个衰变过程的振幅:

$$\mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{Z_c} = \sum_{Z_c} F_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\pi}^{J_Y} D_{\lambda_Y, \lambda_{Z_c} - \lambda_\pi}^{J_Y*} (\Omega_{Z_c}^{\{Y\}}) F_{\lambda_\psi, \lambda_\pi}^{J_{Z_c}} D_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\psi - \lambda_\pi}^{J_{Z_c}*} (\Omega_\psi^{\{Z_c\}}) T_{Z_c}$$

- $\mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{Z_c}$: 含 Z_c 的衰变过程的总振幅, 依赖于 λ_Y 和 $\lambda_\psi^{Z_c}$, Y和 ψ 是初末态粒子. 对其helicity的求和会在最后多个衰变道的总的振幅中表示出来
- 由于 ψ 和 π^\pm 可以组成 Z_c^\pm , 故此过程实际上包含了正负两个过程, 但正负的 Z_c 性质基本相同, 故此处一同考虑
- 由于pion无自旋, 故实际上式中的helicity差值为: $\lambda_{Z_c} - \lambda_\pi = \lambda_{Z_c}$ 和 $\lambda_\psi^{Z_c} - \lambda_\pi = \lambda_\psi^{Z_c}$
- T_{Z_c} : 用来描述中间共振态的函数, 对于 Z_c , 为Breit-Wigner 函数(或flatté函数)

Decay sequence: $Y \rightarrow R_n \psi(3686), R_n \rightarrow \pi^+ \pi^-$

Amplitude of process $Y \rightarrow R_n \psi$

$$\mathcal{A}_{\lambda_{R_n}, \lambda_\psi}^{J_Y} = F_{\lambda_{R_n}, \lambda_\psi}^{J_Y} D_{\lambda_Y, (\lambda_{R_n} - \lambda_\psi)}^{J_Y*}(\Omega_{R_n}^{\{Y\}})$$

- 在Y的静止系中考虑这个过程
- $\mathcal{A}_{\lambda_{R_n}, \lambda_\psi}^{J_Y}$: 具有确定helicity的Y的衰变的振幅, 依赖于 $\lambda_{R_n}, \lambda_\psi$
- 此处的 λ_ψ 是在Y静止系中考虑的 ψ 的helicity, 是含 R_n 过程的 ψ , 本应按前面规则表示为 $\lambda_\psi^{\{R\}}$, 但以此过程为基准, 故简写为 λ_ψ

Amplitude of process $R_n \rightarrow \pi^+ \pi^-$

$$\mathcal{A}_{\lambda_{\pi^+}, \lambda_{\pi^-}}^{J_{R_n}} = F_{\lambda_{\pi^+}, \lambda_{\pi^-}}^{J_{R_n}} D_{\lambda_{R_n}, \lambda_{\pi^+} - \lambda_{\pi^-}}^{J_{R_n}*}(\Omega_{\pi^+}^{\{R_n\}})$$

- 在 R_n 的静止系中考虑此过程
- $\mathcal{A}_{\lambda_{\pi^+}, \lambda_{\pi^-}}^{J_{R_n}}$: 具有确定helicity的 R_n 衰变过程的振幅, 依赖于pion的helicity, 但由于其helicity为0, 故是唯一的
- 由于pion自旋为0, 故 $\lambda_{\pi^+} - \lambda_{\pi^-} = 0$

整个过程的振幅:

$$\mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^R = \sum_n \mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{R_n} = \sum_n \sum_{\lambda_{R_n}} F_{\lambda_{R_n}, \lambda_\psi}^{J_Y} D_{\lambda_Y, (\lambda_{R_n} - \lambda_\psi)}^{J_Y*}(\Omega_{R_n}^{\{Y\}}) F_{\lambda_{\pi^+}, \lambda_{\pi^-}}^{J_{R_n}} D_{\lambda_{R_n}, \lambda_{\pi^+} - \lambda_{\pi^-}}^{J_{R_n}*}(\Omega_{\pi^+}^{\{R_n\}}) T_R$$

- R_n 有多种可能, 对于S-wave, 可能有 σ, f_0 等, 对于D-wave, 有 f_2
- 不同的 R_n helicity不同, 需要对其helicity求和
- 需要考虑不同的 R_n 的总的振幅, 故对 n 求和, 代表对所有中间态的求和

$Y \rightarrow \psi \pi^+ \pi^-$ 过程的总振幅

不同中间共振态过程的helicity态转换:

在Y的静止系中, z 轴方向上的总动量为0, 故末态三个粒子在同一平面上运动, 不同过程中 ψ 的helicity态不同, 需考虑一个polar angle的差别

- 对于有 R_n 的过程, ψ 的运动方向是 R_n 的反方向, 在Y的静止系中处理
- 对于有 Z_c 的过程, ψ 的运动方向是 Z_c 静止系中pion的反方向
- 两种过程的 ψ 的动量方向间存在一个 θ_ψ 角的差别, helicity态间需要做旋转变换来做转换

$$|\lambda_\psi^R \rangle = R(0, \theta_\psi, 0) |\lambda_\psi^{Z_c} \rangle = \sum_{\lambda_\psi^{Z_c}} d_{\lambda_\psi^{Z_c}, \lambda_\psi^R}^{J_\psi}(\theta_\psi) |\lambda_\psi^{Z_c} \rangle$$

所有过程的总振幅

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{\lambda_Y, \lambda_\psi} \left| \sum_n \mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{R_n} + \sum_{\lambda_\psi^{Z_c^+}} d_{\lambda_\psi^{Z_c^+}, \lambda_\psi^R}^{J_\psi}(\theta_\psi^{Z_c^+}) \mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi^{Z_c^+}}^{Z_c^+} + \sum_{\lambda_\psi^{Z_c^-}} d_{\lambda_\psi^{Z_c^-}, \lambda_\psi^R}^{J_\psi}(\theta_\psi^{Z_c^-}) \mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi^{Z_c^-}}^{Z_c^-} \right|^2$$

- 此处是考虑了一个 Z_c 共振态的情况, 如果考虑多个 Z_c , 需要把所有 Z_c 的贡献都放进去

- 初态 Y 的helicity可能的取值为 $\lambda_Y = \pm 1, 0$,有三个值,但由于 Y 是由正负电子经过虚光子(光是横波)过来的,故 Y 的helicity不能为0,即 $\lambda_Y = \pm 1$
- 末态的pion,自旋为0,故无需对pion的helicity求和
- 末态的 ψ 其自旋为1,故其helicity可能的取值为 $\lambda_\psi = \pm 1, 0$
- $(\lambda_Y, \lambda_\psi)$ 的取值共有6种组合,即总振幅 $|\mathcal{M}|^2$ 有6个incoherent的求和部分

$L - S$ coupling partial wave amplitude

在真实计算振幅时,是在正则系中计算的,因而需要将helicity振幅用 $L - S$ coupling partial wave amplitude展开:

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^J = \sum_{l s} \left(\frac{2l+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l 0 s \lambda | J \lambda) (s_1 \lambda_1 s_2 - \lambda_2 | s \lambda) g_{ls}^J r^l B_l(r)$$

Decay sequence: $Y \rightarrow Z_c^\pm \pi^\mp, Z_c^\pm \rightarrow \psi(3683) \pi^\pm$

- Y state的量子数: $J_Y^{PC} = 1^{--}$
- 根据其他的研究,假设 Z_c 的量子数为: $J_{Z_c}^P = 1^+$,故其helicity有三种取值 $\lambda_{Z_c} = \pm 1, 0$
- pion的量子数: $J_\pi^P = 0^-$,故其helicity只能为0

$$\begin{aligned} \text{Decay: } Y &\rightarrow Z_c \pi \\ J^{PC}: 1^{--} &\rightarrow 1^+ 0^- \end{aligned}$$

- 宇称守恒要求 $(-1) = (+1)(-1)(-1)^l = (-1)^{l+1}$,则 Z_c 和 π 间的轨道角动量 $l = \text{even}$
- Z_c 和 π 间的总自旋为 $s = 1$,由角动量守恒, $1 = J = l + 1, l, |l - 1|$,因而轨道角动量只能取 $l = 0, 2$,即展开的振幅中需要考虑**S-wave**和**D-wave**的贡献

对于此衰变过程, helicity振幅有三种可能 $F_{1,0}^1, F_{-1,0}^1, F_{0,0}^1$:

$$F_{1,0}^1 = \sqrt{\frac{1}{3}} (0011|11)(1100|11) r^0 B_0(r) g_{01} + \sqrt{\frac{5}{3}} (2011|11)(1100|11) r^2 B_2(r) g_{21}$$

$$F_{0,0}^1 = \sqrt{\frac{1}{3}} (0010|10)(1000|10) r^0 B_0(r) g_{01} + \sqrt{\frac{5}{3}} (2010|10)(1000|10) r^2 B_2(r) g_{21}$$

- 由于 $F_{\lambda_1, \lambda_2}^J$ 的对称性,则 $F_{1,0}^1 = F_{-1,0}^1$
- C-G系数可查表得,在程序中,已有现成程序用以计算C-C系数

$$\begin{aligned} \text{Decay: } Z_c &\rightarrow \psi \pi \\ J^{PC}: 1^+ &\rightarrow 1^- 0^- \end{aligned}$$

- 宇称守恒要求 $(+1) = (-1)(-1)(-1)^l$,则轨道角动量 $l = \text{even}$
- ψ 和 π 的总自旋为 $s = 1$,由角动量守恒, $1 = J = l + 1, l, |l - 1|$,因而 $l = 0, 2$
- 对于此衰变过程, helicity振幅和前一过程相同,为 $F_{1,0}^1, F_{-1,0}^1, F_{0,0}^1$

由前述分析可知,此过程的振幅为:

$$\mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{Z_c} = \sum_{\lambda_{Z_c}} F_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\pi}^{J_Y} D_{\lambda_Y, \lambda_{Z_c} - \lambda_\pi}^{J_Y^*} (\Omega_{Z_c}^{\{Y\}}) F_{\lambda_\psi, \lambda_\pi}^{J_{Z_c}} D_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\psi - \lambda_\pi}^{J_{Z_c}^*} (\Omega_\psi^{\{Z_c\}}) T_{Z_c}$$

将振幅进行LS展开可得:

$$\mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{Z_c} = \sum_{\lambda_{Z_c}} D_{\lambda_Y, \lambda_{Z_c} - \lambda_\pi}^{J_Y^*} (\Omega_{Z_c}^{\{Y\}}) (a_S g_{01} + a_D g_{21}) * (a'_S g'_{01} + a'_D g'_{21}) D_{\lambda_{Z_c}, \lambda_\psi - \lambda_\pi}^{J_{Z_c}^*} (\Omega_\psi^{\{Z_c\}}) T_{Z_c}$$

- 其中 $a_S, a_D (a'_S, a'_D)$ 分别是 $L - S$ 展开后, 对应于 $S - wave$ 和 $D - wave$ 的系数, 完全由 **helicity** 确定
- $g_{01}, g'_{01} (g_{21}, g'_{21})$ 分别是第一个子过程和第二个子过程的 $L - S$ 分波振幅

将角度部分的 D 函数吸收入各个波的系数中, 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda_Y, \lambda_\psi}^{Z_c} &= \sum_{\lambda_{Z_c}} (A_S g_{01} + A_D g_{21}) * (A'_S g'_{01} + A'_D g'_{21}) * T_{Z_c} \\ &= \sum_{\lambda_{Z_c}} U_{SS} + U_{SD} + U_{DS} + U_{DD} \\ &\quad U_{SS} = A_S A'_S g_{01} g'_{01} * T_{Z_c} \\ &\quad U_{SD} = A_S A'_D g_{01} g'_{21} * T_{Z_c} \\ &\quad U_{DS} = A_D A'_S g_{21} g'_{01} * T_{Z_c} \\ &\quad U_{DD} = A_D A'_D g_{21} g'_{21} * T_{Z_c} \end{aligned}$$

- 其中, $A_S (A_D, A'_S, A'_D)$ 是吸收了角度部分 $D - function$ 的系数
- $U_{SS} (U_{SD}, U_{DS}, U_{DD})$ 是展开后的包含两个子过程的 $L - S$ 分波振幅

Decay sequence: $Y \rightarrow R_n \psi (3686), R_n \rightarrow \pi^+ \pi^-$

- $J_Y^{PC} = 1^{--}$
- R_n 的角动量可以有不同选择, $S - wave$ 的 $J^{PC} = 0^{++}$ 或 $D - wave$ 的 $J^{PC} = 2^{++}$, 由于相空间的限制, 主要的贡献来自于 **S-wave**

$J_{R_n}^{PC} = 0^{++}$ 的 **S-wave** 情形

$$\begin{aligned} \text{Decay: } Y &\rightarrow \psi R \\ J^{PC} &: 1^{--} \rightarrow 1^{--} 0^{++} \end{aligned}$$

- 宇称守恒要求 $(-1) = (+1)(-1)(-1)^l$, 则轨道角动量为 $l = even$
- R 和 ψ 的总自旋为 $s = 1$, 有角动量守恒, 可得 $l = 0, 2$
- 此过程的 **helicity** 振幅和前面过程相同, $F_{1,0}^1, F_{-1,0}^1, F_{0,0}^1$

$$\begin{aligned} \text{Decay: } R &\rightarrow \pi \pi \\ J^{PC} &: 0^{++} \rightarrow 0^- 0^- \end{aligned}$$

- 宇称守恒要求 $(+1) = (-1)(-1)(-1)^l$, 则轨道角动量为 $l = even$
- $\pi\pi$ 的总自旋为 $s = 0$, 有角动量守恒可得 $l = 0$, 即此过程只有 **S-wave** 的贡献
- 此过程的 **helicity** 振幅和前面过程不同, 为 $F_{0,0}^0$:

$$F_{0,0}^0 = (0000|00)(0000|00)g_{00}r^0 B_0(r)$$

$J^{PC} = 2^{++}$ 的D-wave情形

$$\begin{aligned} \text{Decay: } Y &\rightarrow \psi R \\ J^{PC} : 1^{--} &\rightarrow 1^{--} 2^{++} \end{aligned}$$

- 宇称守恒要求 $(-1) = (-1)(+1)(-1)^l$, 则轨道角动量为 $l = \text{even}$
- ψ 和R可以构成的总自旋为 $s = 3, 2, 1$ 由轨道角动量守恒
 - $s = 3$ 时, $l = 4, 2$, 对应于 $L - S$ 耦合振幅 g_{43}, g_{23}
 - $s = 2$ 时, $l = 2$, 对应于 $L - S$ 耦合振幅 g_{22}
 - $s = 1$ 时, $l = 2, 0$, 对应于 $L - S$ 耦合振幅 g_{21}, g_{01}
- $(\lambda_\psi, \lambda_R)$ 共有15种组合, 由 $F_{\lambda_1, \lambda_2}^J$ 的对称关系可得: $F_{\lambda_1, \lambda_2}^J = F_{-\lambda_1, -\lambda_2}^J$
- helicity振幅中只有9个是相互独立的, 分别为:

$$\begin{aligned} \lambda_\psi = 1, & F_{1,2}^1, F_{1,1}^1, F_{1,0}^1 \\ \lambda_\psi = 0, & F_{0,2}^1, F_{0,1}^1, F_{0,0}^1 \\ \lambda_\psi = -1, & F_{-1,2}^1, F_{-1,1}^1, F_{-1,0}^1 \end{aligned}$$

$$F_{\lambda_\psi, \lambda_R}^1 = \sum_{ts} \sqrt{\frac{2l+1}{3}} (l, 0, s, (\lambda_\psi - \lambda_R) | 1, (\lambda_\psi - \lambda_R)) (1, \lambda_\psi, 2, -\lambda_R | s, (\lambda_\psi - \lambda_R)) g_{ts} r^l B_l(r)$$

$$\begin{aligned} \text{Decay: } R &\rightarrow \pi \pi \\ J^{PC} : 2^{++} &\rightarrow 0^- 0^- \end{aligned}$$

- 宇称守恒要求 $(+1) = (-1)(-1)(-1)^l$, 则轨道角动量为 $l = \text{even}$
- 末态pion pair的自旋为 $s = 0$, 角动量守恒可得 $l = 2$, 因而只有一个 $L - S$ 耦合振幅 g_{20}
- helicity振幅为:

$$F_{00}^2 = (2000|20)(0000|00) g_{20} r^2 B_2(r)$$

关于拟合的讨论

对实验数据进行分波分析的思路:

- 构造不变振幅: 确定角分布的描述和动力学描述, 从而得到截面
- 构造目标函数: 利用截面并考虑实验的效率(探测分辨), 构造有效的目标函数, 并对目标函数进行数学计算.,
- 求极值: 对目标函数求极值(一般是最小值), 从而得到我们关心的有物理意义的参数(质量, 宽度, 振幅相位差等)和误差

目标函数的一种构造方式

在很多BES的物理分析中(以及本分析所使用的AmpTool包中), 使用极大似然法来拟合实验数据

构造目标函数

- x : 实验测得的独立物理量, 即末态粒子的四动量
- $\omega(x, \alpha)$: 产生四动量组合 x 的概率密度, 实际上其为微分截面, α 是待确定的参数
- $\epsilon(x)$: 探测器探测到特定四动量组合 x 的效率
- $G(x', x)$: 探测器的分辨函数

定义观察到一个四动量组合 x 的几率密度为:

$$P(x : \alpha) = \frac{\int d\mathbf{x}' \omega(\mathbf{x}, \alpha) \epsilon(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\iint d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \alpha) \epsilon(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}', \mathbf{x})}$$

- 分母部分是归一化因子

假设忽略探测器的分辨, 即假定探测器的分辨是 δ 函数, 则可得

$$P(x : \alpha) = \frac{\omega(x, \alpha) \epsilon(x)}{\int dx \omega(x, \alpha) \epsilon(x)}$$

从第1个到第 N 个事例, 具有四动量组合从 x_1 到 x_n 的联合概率密度为:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n : \alpha) = \prod_{i=1}^N P(x_i) = \prod_{i=1}^N \frac{\omega(x_i, \alpha) \epsilon(x_i)}{\int dx \omega(x, \alpha) \epsilon(x)}$$

对此联合概率密度取对数:

$$\ln P(x_1, x_2, \dots, x_n : \alpha) = \sum_{i=1}^N \ln \left[\frac{\omega(x_i, \alpha)}{\int dx \omega(x, \alpha) \epsilon(x)} \right] + \sum_{i=1}^N \ln \epsilon(x_i)$$

- 第二项, 对于特定的观测值, 是常数, 可以忽略, 在求极值时只需考虑第一项
- 对数中, 分母部分是总截面, $\sigma = \int dx \omega(x, \alpha) \epsilon(x)$

利用联合概率密度构造极大似然函数:

$$\ln \mathcal{L} = \ln P(x_1, x_2, \dots, x_N : \alpha) = \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\omega(x_i, \alpha)}{\sigma} \right)$$

为数学拟合的方便, 将极大似然函数的负对数作为目标函数:

$$S = -\ln \mathcal{L}$$

- 通过拟合, 在使目标函数 S 取最小值时, 即可得到所感兴趣的物理量

Monte Carlo 积分

在利用极大似然法做拟合时, 需要计算总截面, 因为 $\omega(x, \alpha)$ 形式复杂, 且无法得到 $\epsilon(x)$ 的解析形式, 无法进行解析的积分

此处采用Monte Carlo积分法中的期望值估计法来做计算

期望值估计法:

- 任何一个积分都可以表示成某个随机变量的数学期望

假设所求积分为:

$$I = \int_{V_s} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 是 S 维空间中的点, V_s 是积分空间

令 $f(x)$ 为 x 的概率密度函数

$$\int_{V_s} f(x) dx = 1$$

则

$$I = \int_{V_s} g(x) dx = \int_{V_s} \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = E \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right] = E[h(x)]$$

- 积分 I 可表示为随机变量 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 的数学期望

抽取随机变量 x 的一组子样 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 则有

$$I = E[h(\xi)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \equiv I_n$$

- 从而得到积分 I 的值

$$E(I_n) = E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \right] = E(h) = I$$

$$V(I_n) = V \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(h_i) = \frac{1}{n} V_h$$

- 积分的误差大小取决于随机子样的大小, 子样越大, 误差越小
- 在实际操作中, 利用探测器决定的Monte Carlo相空间来进行计算积分, 即Monte Carlo相空间事例经过事例挑选程序后作为 σ 的求和空间

在实际中,

$$\sigma = \int d\mathbf{x} \omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} \omega(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\alpha})$$

1. The section of spin formalism refers to the note by Suh-Urk Chung. ↪

2. The section of helicity angle and notations refers to the appendix of paper of Lhcb. ↪