

粲介子含轻衰变的LQCD研究

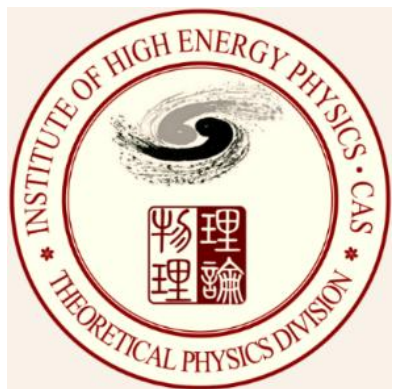
刘朝峰

高能物理研究所

2023.04.07

2023年BESIII粲强子物理研讨会暨国家自然科学基金《粲夸克衰变中标准模型的精确检验》
重大项目研讨会

中国科学技术大学，2023.04.06-04.09



使用格点QCD计算粲介子半轻衰变形状因子

国家自然科学基金 资助项目计划书 (预算制项目)

课题四：精确测量粲介子半轻衰变形状因子和检验轻子普适性（负责人：马海龙）

研究内容：计算 $D \rightarrow K$ 、 $D \rightarrow \pi$ 、 $D_s^+ \rightarrow \phi$ 等半轻衰变形状因子

计算框架

- 组态：2+1-味全QCD模拟组态（domain wall fermions，来自RBC-UKQCD合作组）
- 价夸克：overlap fermions
- 海夸克和价夸克都采用手征格点费米子作用量

年度计划

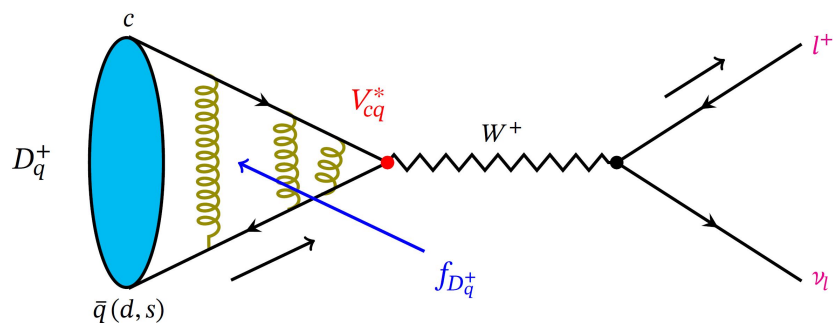
- ✓ **2022**：计算夸克双线性算符重正化常数，计算和分析介子两点函数
- **2023**：计算和分析三点函数
- **2024-2026**：抽取形状因子，分析系统误差；给出分支比等物理观测量理论值，与实验比较；视情况将计算扩展到更多组态和/或衰变道

资助类别：重大项目
亚类说明：课题申请
附注说明：粲夸克衰变中标准模型的精确检验
项目名称：精确测量粲介子半轻衰变形状因子和检验轻子普适性
直接费用：320万元 执行年限：2022.01-2026.12
负责人：马海龙
通讯地址：北京石景山区玉泉路19号(乙)
邮政编码：100049 电话：88237400
电子邮件：mahl@ihep.ac.cn
依托单位：中国科学院高能物理研究所
联系人：鄢芬 电话：88235843
填表日期：2021年12月02日

粲物理与LQCD

- LQCD can calculate form factors and meson decay constants appearing in weak decays of hadrons
- Combined with experiments, they can give us CKM matrix elements
- Test the SM (is the CKM matrix unitary?)
- Or use V_{ab} from elsewhere to compare QCD/SM results with experiments

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ \pi \rightarrow \ell \nu & K \rightarrow \ell \nu & B \rightarrow \pi \ell \nu \\ & K \rightarrow \pi \ell \nu & \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ D \rightarrow \ell \nu & D_s \rightarrow \ell \nu & B \rightarrow D \ell \nu \\ D \rightarrow \pi \ell \nu & D \rightarrow K \ell \nu & B \rightarrow D^* \ell \nu \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \\ B_d \leftrightarrow \bar{B}_d & B_s \leftrightarrow \bar{B}_s & \end{pmatrix}$$



courtesy [arXiv:2103.00908](https://arxiv.org/abs/2103.00908)

抽取CKM矩阵元

衰变常数可由LQCD给出

例如: $\Gamma(P \rightarrow \ell \nu) = \frac{G_F^2 |V_{q_1 q_2}|^2}{8\pi} f_P^2 m_\ell^2 M_P \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M_P^2}\right)^2$

实验测量

粲介子半轻衰变

- $D \rightarrow \pi l \nu$, $D \rightarrow K l \nu$ 可用于确定 $|V_{cd}|$ 和 $|V_{cs}|$

$$\frac{d\Gamma(D \rightarrow K l \nu)}{dq^2} = (\text{known}) |\mathbf{p}_K|^3 |V_{cs}|^2 |f_+^{D \rightarrow K}(q^2)|^2$$

- 需要形状因子 $f_+(q^2)$

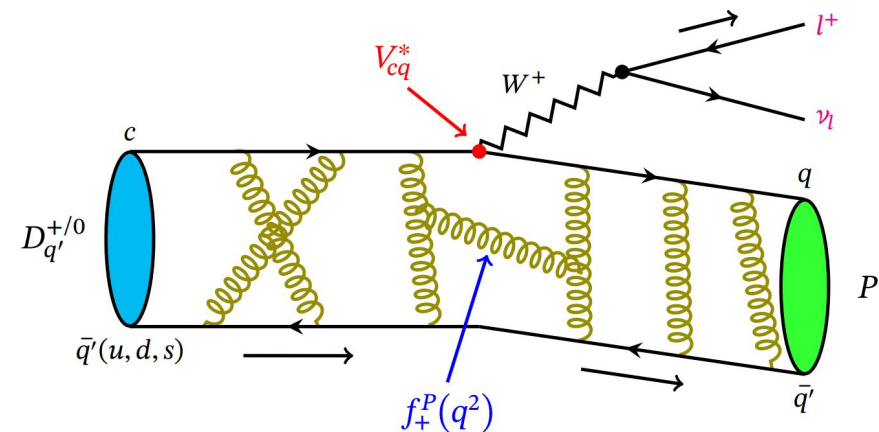
$$\langle K | V^\mu | D \rangle = f_+(q^2) \left(p_D^\mu + p_K^\mu - \frac{m_D^2 - m_K^2}{q^2} q^\mu \right) + f_0(q^2) \frac{m_D^2 - m_K^2}{q^2} q^\mu$$

对于 $l = e, \mu$, 形状因子 f_0 可忽略 (对衰变宽度的贡献正比于 m_l^2)

- 标量流形状因子 $\langle K | S | D \rangle = f_0^{D \rightarrow K}(q^2) \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_c - m_s}$

- 张量流形状因子 $\langle P | T_{\mu\nu} | D \rangle = \frac{2}{m_D + m_P} [p_{P\mu} p_{D\nu} - p_{P\nu} p_{D\mu}] f_T(q^2)$

- 其它衰变道: $D_s \rightarrow \phi l \nu$, $D_s \rightarrow \eta^{(\prime)} l \nu$



courtesy [arXiv:2103.00908](https://arxiv.org/abs/2103.00908)

强子矩阵元的格点计算

$$C(t) = \langle \Omega | O(t) O^\dagger(0) | \Omega \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} |\langle \Omega | O | P \rangle|^2 e^{-m_P t} \equiv A e^{-m_P t}$$

- 介子衰变常数从两点函数抽取, 例如 $O = \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 c$

$$\langle 0 | \bar{q}(0) \gamma_\mu \gamma_5 c(0) | P(p) \rangle = i f_P p_\mu, \quad q = d, s$$

- 结合两点 and 三点函数可抽取半轻过程形状因子, 如:

$$C_3(\vec{p}, \vec{p}', T, t) = \sum_{\vec{x}} \sum_{\vec{y}} \langle 0 | O_D(\vec{x}, T) J(\vec{y}, t) O_P^\dagger(\vec{z}, 0) | 0 \rangle e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{y}}$$

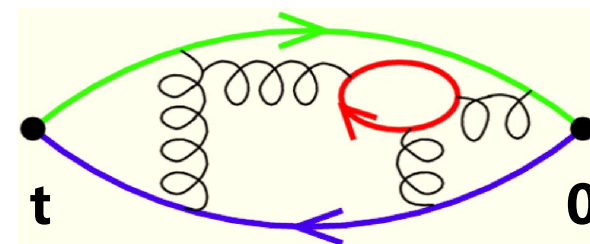
$$\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{T \rightarrow \infty} \xrightarrow{(T-t) \rightarrow \infty} \langle 0 | O_D | D \rangle \langle D | J | P \rangle \langle P | O_P^\dagger | 0 \rangle e^{-m_P t} e^{-m_D (T-t)}$$

- 算符的重正化常数

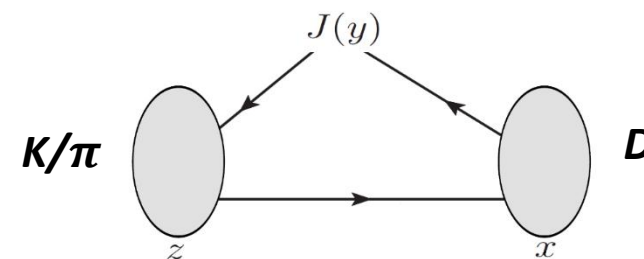
- 由于离散效应, 格子上的局域(轴)矢量流 $\bar{q} \gamma_\mu c$ ($\bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 c$) 需要归一化常数 $Z_{V,A}$
- 标量及张量流算符随能标跑动, $Z_{S,T}$

- 使用手征格点费米子有时可避免重正化常数的计算 ($Z_S Z_m = 1$)

- PCAC: $(m_q + m_c) \langle 0 | \bar{q}(0) \gamma_5 c(0) | P(p) \rangle = f_P m_{PS}^2$



两点关联函数



三点关联函数

- PCVC: $\langle K | S | D \rangle = f_0^{D \rightarrow K}(q^2) \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_c - m_s}$

重正化常数

$$\mathcal{O}(\mu) = Z(\mu, a) \mathcal{O}(a)$$

- 将格点计算得到的强子矩阵元匹配到连续 $\overline{\text{MS}}$ 方案

$$\mathcal{O} = \bar{\psi} \Gamma \psi, \quad \Gamma = I, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$$

- 使用两种动量减除方案(S)MOM做非微扰计算，再微扰转换到 $\overline{\text{MS}}$ 方案

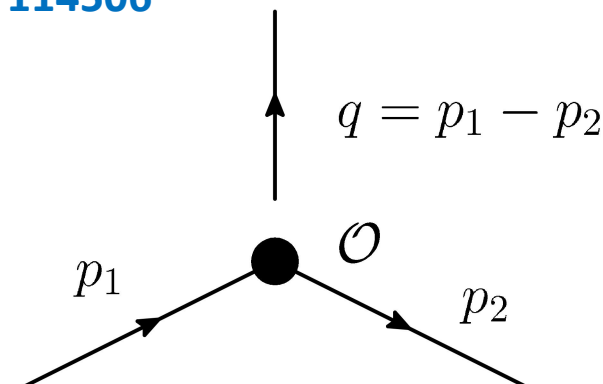
$$Z_\Gamma \langle p | \mathcal{O}_\Gamma | p \rangle|_{p^2=\mu^2} = \langle p | \mathcal{O}_\Gamma | p \rangle_{\text{tree}}$$

- 对于不同格距，不同格点作用量组态，需要做相应的计算

- 系统误差: 格距误差, α_s 误差, 微扰截断, 拟合范围, 手征极限, 有限体积, 离散误差**

Source	$Z_q^{\overline{\text{MS}}}/Z_V$	$Z_S^{\overline{\text{MS}}}/Z_V$	$Z_P^{\overline{\text{MS}}}/Z_V$	$Z_T^{\overline{\text{MS}}}/Z_V$
Statistical	0.04	0.08	0.21	0.01
Conversion ratio	0.34	2.29	2.15	0.40
Perturbative running	0.03	0.11	0.11	0.03
$\Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}}$	0.02	0.31	0.26	0.04
Lattice spacing	0.01	0.09	0.09	0.03
Fit range of $a^2 p^2$	0.13	0.03	0.27	0.01
Finite-volume effect	0.02	0.07	0.14	0.01
$m_s^{\text{sea}} \neq 0$	0.17	0.46	1.61	0.06
Total uncertainty	0.41	2.36	2.73	0.41

via MOM



tag	$6/g^2$	L	T	$a(\text{fm})$	m_π (MeV)
24D	1.633	24	64	0.194(2)	139
24DH	1.633	24	64	0.194(2)	337
32Dfine	1.75	32	64	0.143(2)	139
48I	2.13	48	96	0.1141(2)	139
24I	2.13	24	64	0.1105(2)	340/432/576/693
64I	2.25	64	128	0.0837(2)	139
48If	2.31	48	96	0.0711(3)	280
32If	2.37	32	64	0.0626(4)	371
HISQ12L	3.60	48	64	0.1213(9)	130
HISQ12H	3.60	24	64	0.1213(9)	310
HISQ09L	3.60	64	96	0.0882(7)	130
HISQ09H	3.78	32	96	0.0882(7)	310
HISQ06	4.03	48	144	0.0574(5)	310
HISQ04	4.20	64	192	0.0425(4)	310

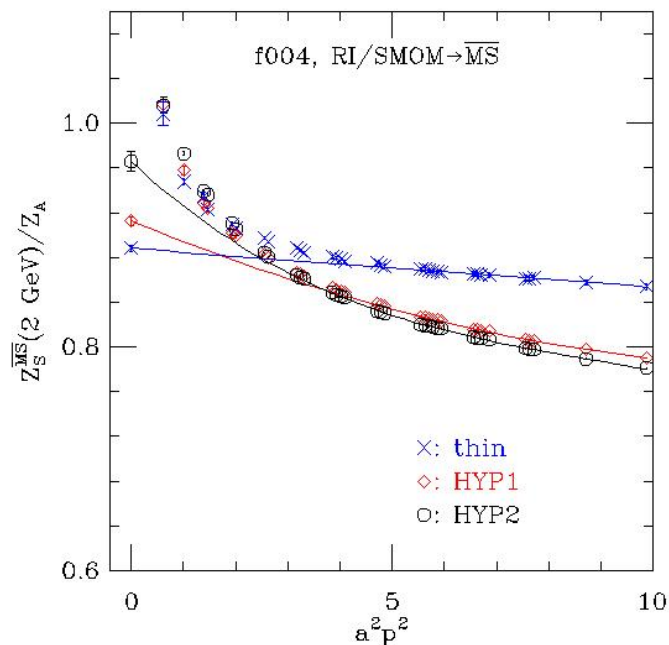
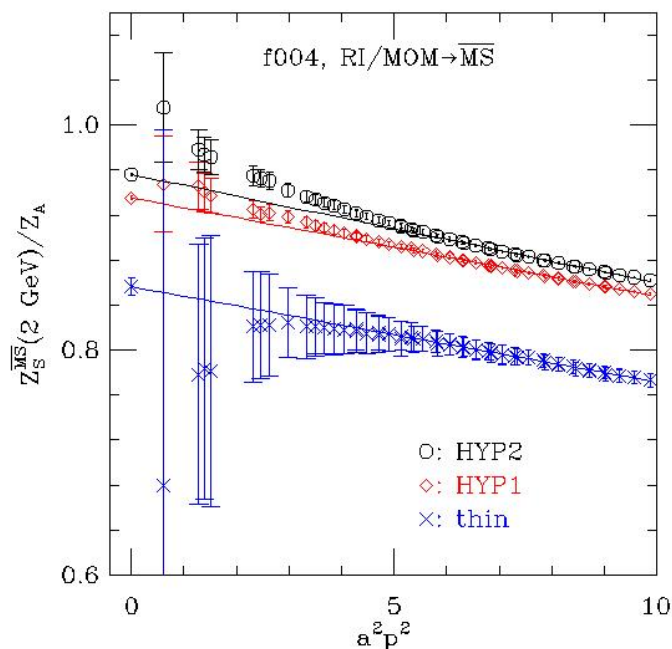
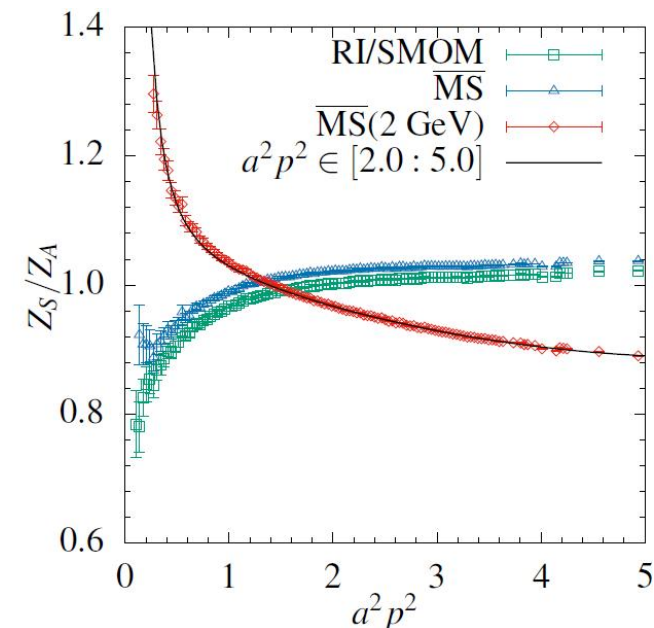
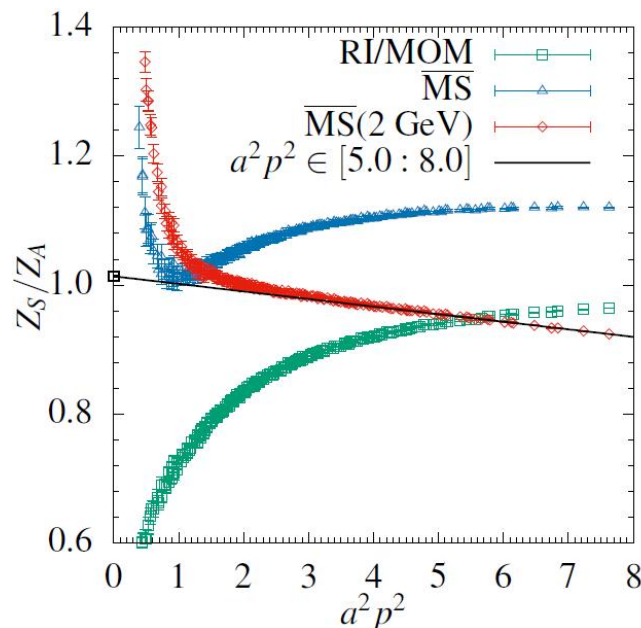
14套组态 (多个格距) 上的计算

MOM与SMOM的比较及系统误差

- SMOM方案给出的 $Z_S^{\overline{MS}}(2\text{ GeV})$ 对计算使用的初始能标(a^2p^2)的依赖行为出乎预料
- 是否与格点QCD常用的smearing(涂摩)有关?

label	am_l/am_s	volume	N_{conf}	am_{res}
f004	0.004/0.03	$32^3 \times 64$	42	0.0006664(76)
f006	0.006/0.03	$32^3 \times 64$	42	
f008	0.008/0.03	$32^3 \times 64$	49	

(组态32I)



$$y = c_{-1}/(a^2p^2) + y_0 + c_1 a^2p^2 + c_2 (a^2p^2)^2$$

[PRD97.094501 (2018)]

thin: 不做涂摩 (no smearing)

HYP1: 一次hypercubic涂摩

HYP2: 两次hypercubic涂摩

- 使用SMOM方案过渡时, $Z_S^{\overline{MS}}(2\text{ GeV}; a^2p^2)$ 的 a^2p^2 依赖行为对涂摩较为敏感
- $Z_T^{\overline{MS}}$ 的精度可达到1%以内

重正化常数

- MOM方案转换系数从3圈提高到4圈

J. A. Gracey, arXiv:2208.14527, 2210.12420

相对误差

$Z_S^{\overline{\text{MS}}}(2\text{ GeV}) = 1.011(13)$

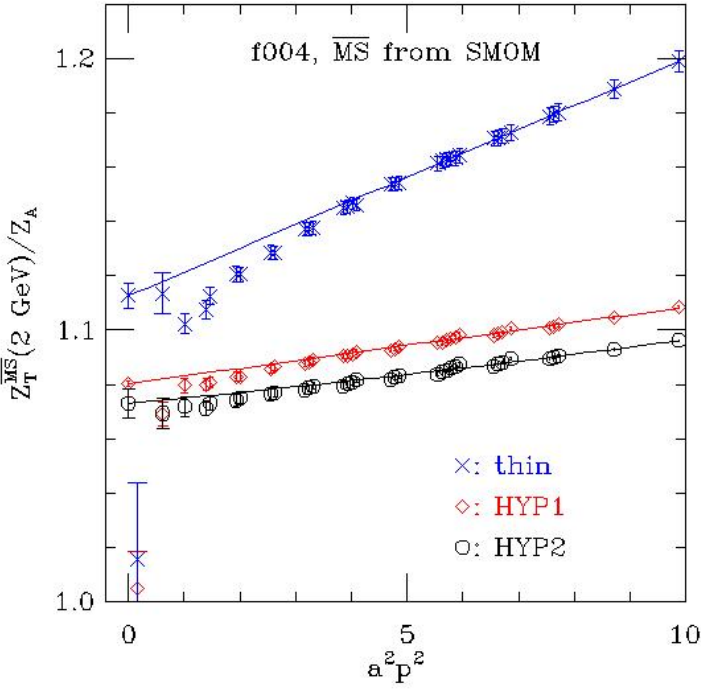
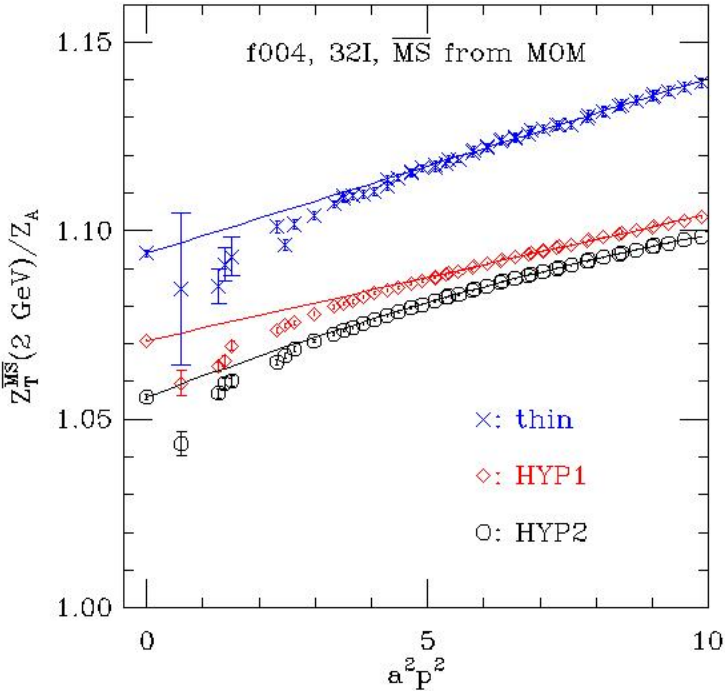
1.3% (2014年: 2.3%)

$Z_T^{\overline{\text{MS}}}(2\text{ GeV}) = 1.1586(91)$

0.8% (2018年: 2.9%)

(组态32I)

$Z_S^{\overline{\text{MS}}}$ 系统误差



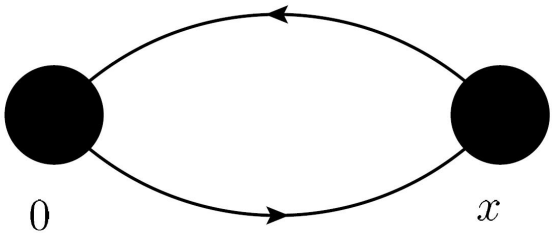
$Z_T^{\overline{\text{MS}}}$ 系统误差

Source	MOM (%)	SMOM (%)
Conversion ratio	0.07	0.26
$\Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}}$	0.16	0.15
Lattice spacing	0.03	0.04
Perturbative running	< 0.01	< 0.01
Fit range of $a^2 p^2$	0.07	0.18
$m_s^{\text{sea}} \neq 0$	0.21	0.27
Extrapolation in m_l	0.05	0.12
Total sys. uncertainty	0.29	0.46

粲介子衰变常数

李东浩 et al., in progress

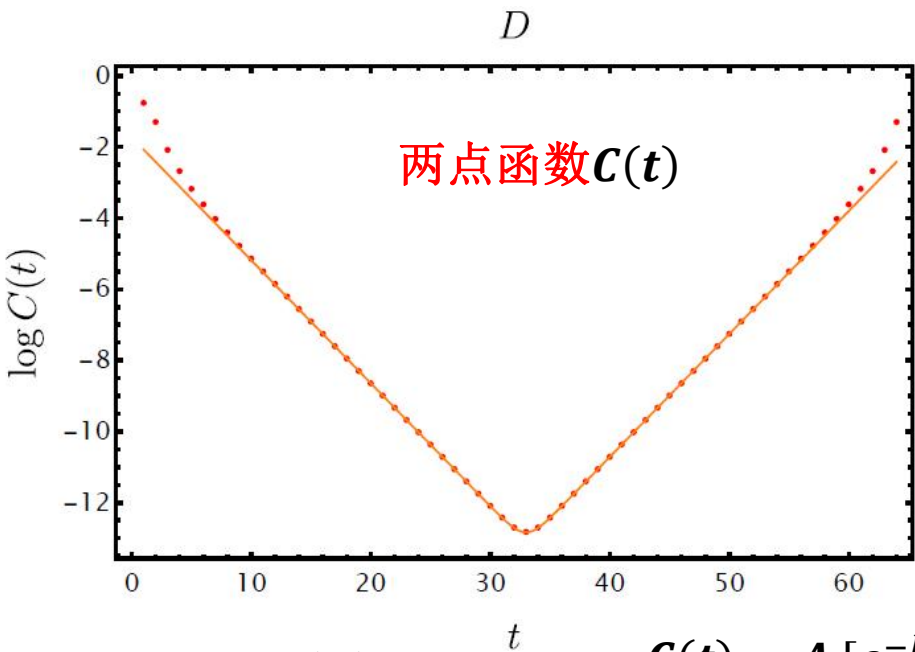
- 1. 格子大小: $32^3 \times 64 \sim 2.6\text{fm}$, $a^{-1} = 2.383(9)\text{GeV} \sim 0.08\text{fm}$
- 2. 价夸克质量: $am_{u/d} = 0.0046 \sim 0.024$, $am_s = 0.037 \sim 0.043$, $am_c = 0.45 \sim 0.55$
海夸克质量: $am_l = 0.004$, $am_s = 0.03$ ($m_\pi^{\text{sea}} \approx 302\text{ MeV}$)
- 3. 费米子作用量: domain wall (海夸克) + overlap (价夸克)
- 4. 输入参数: $m_\pi^2 \Rightarrow m_{u/d}$, $m_{ss}^2 = 2m_K^2 - m_\pi^2 \Rightarrow m_s$, $m_{D(s)} \Rightarrow m_c$



- 计算两点关联函数 $O = \bar{q}\gamma_0\gamma_5 c$

$$C(t) = \sum_{\vec{x}} \langle \Omega | O(\vec{x}, t) O^\dagger(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle$$

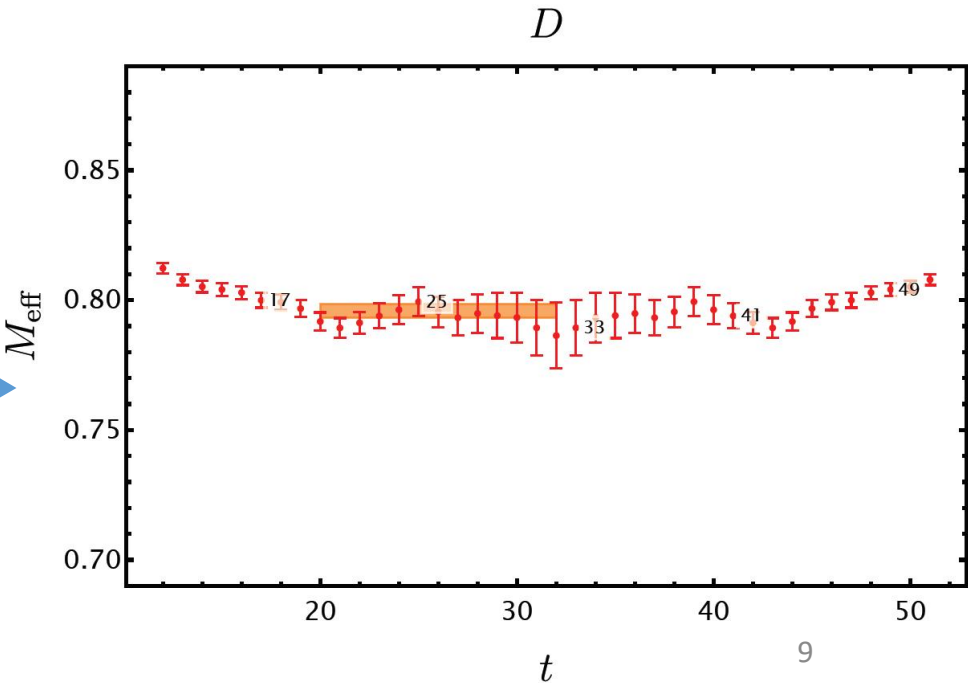
$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2MV} |\langle \Omega | O | P \rangle|^2 e^{-Mt} \equiv A e^{-Mt}$$



628个组态

定义

$$M_{\text{eff}} = \ln \frac{C(t)}{C(t+1)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} M$$



$$C(t) = A [e^{-Mt} + e^{-M(T-t)}]$$

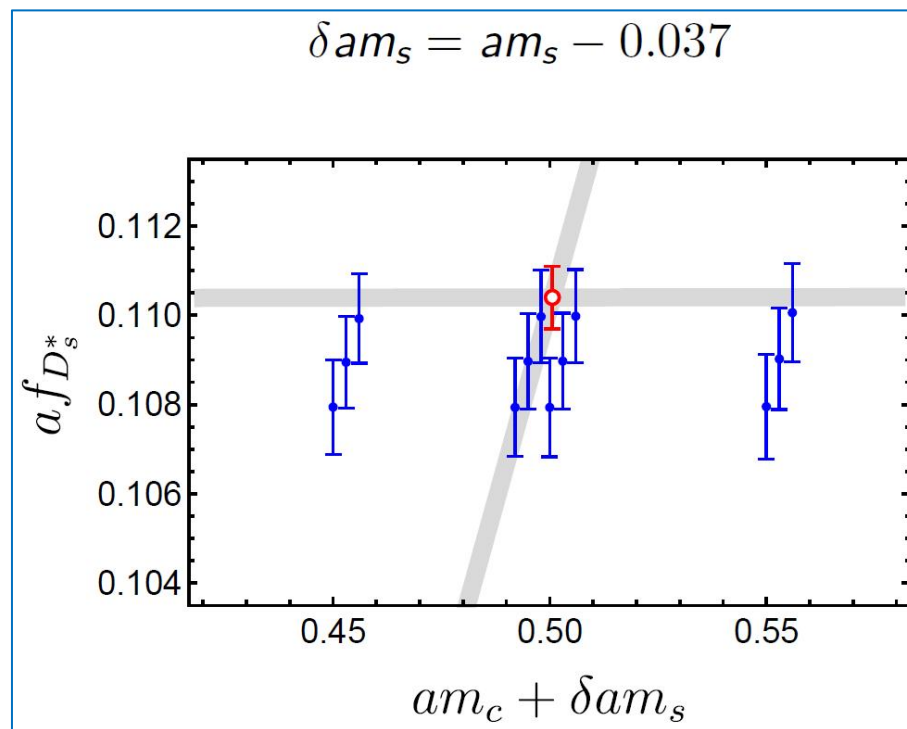
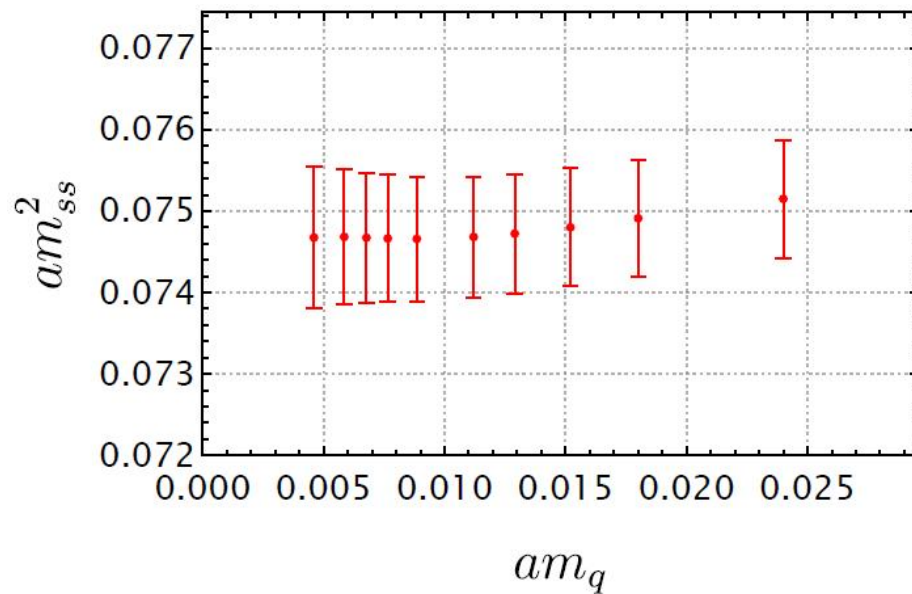
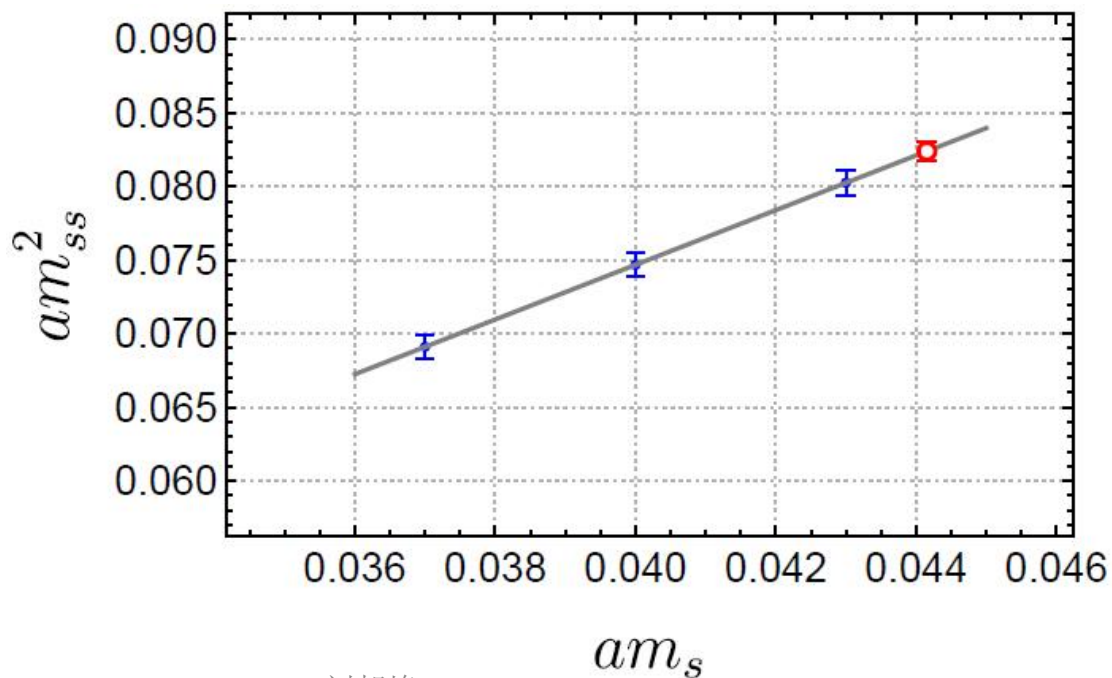
粲介子衰变常数

内插/外推到物理质量点（价夸克）

10个轻夸克质量； 3 (6)个奇异夸克质量； 4个粲夸克质量

$$f_{D_s^*}(m_c, m_s) = f_{D_s^*}^{\text{phys}} + c_1(m_{ss}^2 - m_{ss}^2(\text{phys})) + c_2(M_{D_s} - M_{D_s}^{\text{phys}})$$

$$m_{ss}^2 \equiv 2m_K^2 - m_\pi^2 \propto m_s$$



粲介子衰变常数

李东浩 et al., in progress

初步结果

Y. Bi et al., arXiv: 2302.01659

(GeV)	a^{-1}	f_D	f_{D_s}	f_{D^*}	$f_{D_s^*}$
	2.383(9)	0.2162(14)	0.2485(19)	0.2425(20)	0.2843(23)
	1.730(4) ¹	0.213(2)(4)	0.249(5)	0.234(3)(5)	0.274(5)(5)
	FLAG average ²	0.2090(24)	0.2480(16)	-	-

1Y. Chen et al.,Chin. Phys. C 45 (2021) no.2, 023109

2Y. Aoki et al. [FLAG] Eur. Phys. J. C 82 (2022) no.10, 869

重正化常数 ($\overline{MS}$, 2 GeV)

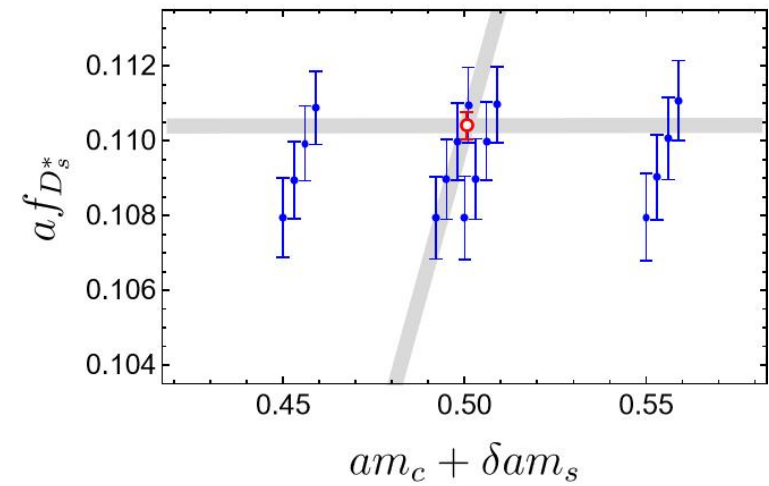
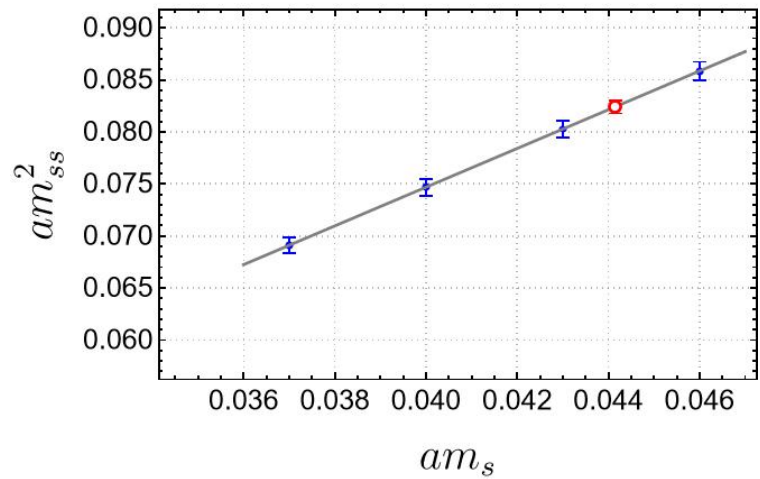
$Z_A(Z_V)$	Z_T	Z_S
1.0807(31)	1.1581(90)	1.011(15)

- 增加(价)奇异夸克质量点，外推变内插
- 增加不同轻海夸克质量组态上的数据
- 外推到海夸克物理质量点

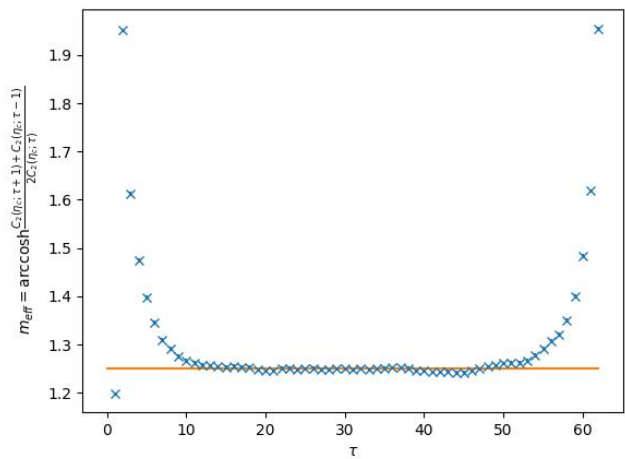
$a^{-1}(\text{GeV})$	$f_{D_s^*}^T/f_{D_s^*}$	$f_{D^*}^T/f_{D^*}$	f_{D^*}/f_D	$f_{D_s^*}/f_{D_s}$	f_{D_s}/f_D	$f_{D_s^*}/f_{D^*}$
2.383(9)	0.91(2)	0.89(2)	1.12(2)	1.14(2)	1.15(2)	1.17(2)
1.730(4) ¹	0.92(4)	0.91(4)	1.10(3)	1.10(4)	1.16(3)	1.17(3)

$m_\pi^{\text{sea}}/\text{MeV}$	am_l/am_s	volume	统计量
302	0.004/0.03	$32^3 \times 64$	628
359	0.006/0.03	$32^3 \times 64$	672
407	0.008/0.03	$32^3 \times 64$	196

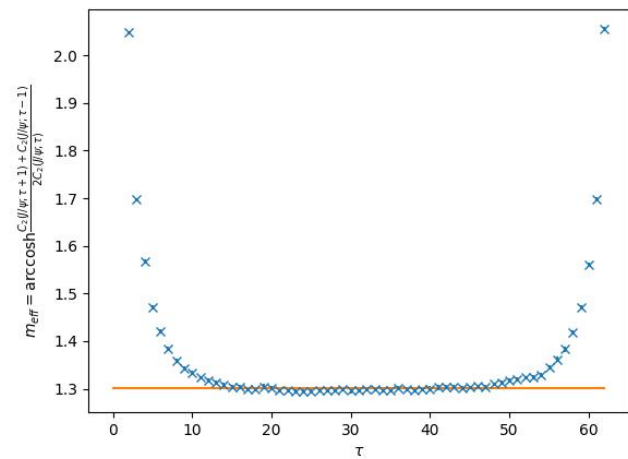
增加一个奇异夸克质量点后的初步结果：



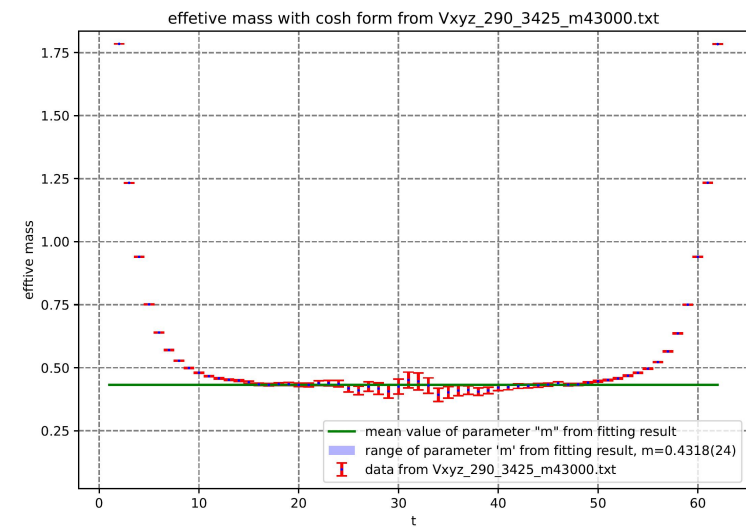
- 粲偶素及 ϕ 介子两点函数的初步分析 王庭霄, 沈庭弘 et al., in progress



η_c 质量平台



J/ψ 质量平台



ϕ 质量平台

研究内容：计算 $D \rightarrow K$ 、 $D \rightarrow \pi$ 、 $D_s^+ \rightarrow \phi$ 等半轻衰变形状因子

计算框架

- 组态：2+1-味全QCD模拟组态（domain wall fermions，来自RBC-UKQCD合作组）
- 价夸克：overlap fermions
- 海夸克和价夸克都采用手征格点费米子作用量

工作进展

- 完成夸克双线性算符重正化常数的计算 [Y. Bi et al., arXiv: 2302.01659, submitted to PRD](#)
- 计算和分析两点函数，得到了 $D_{(s)}^{(*)}$, ϕ 等介子衰变常数的初步结果
- 正在准备产生三点函数

谢谢！

谢谢！

格点量子色动力学(LQCD, 1974) 用数值模拟的办法, 非微扰地研究低能QCD性质



Kenneth G. Wilson (1936-2013)
Nobel Prize 1982

- $\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle = \frac{\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \psi(x)\bar{\psi}(y) e^{i\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x}}{\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi e^{i\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x}}$
- 4维闵可夫斯基时空 $\rightarrow$ 4维欧几里德空间 ($\tau = it$)
- $\langle O \rangle = \frac{\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi O[A, \bar{\psi}, \psi] e^{-\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x}}{\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi e^{-\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x}}, \quad \mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}M[A]\psi + \mathcal{L}_G,$

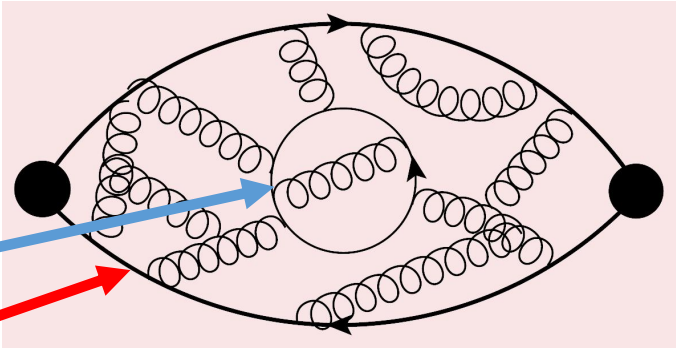
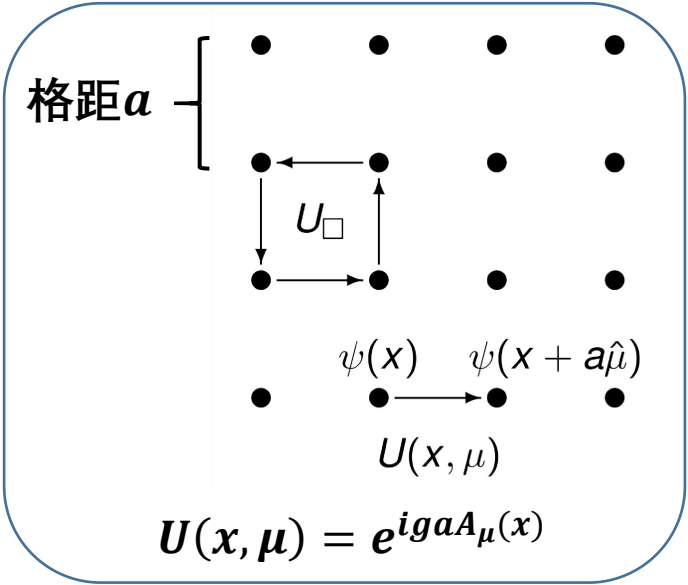
$$M = \gamma \cdot D + m_q$$

- $\langle O \rangle = \frac{\int DA_\mu O[A, M^{-1}[A]] \text{Det}[M[A]] e^{-S_G}}{\int DA_\mu \text{Det}[M[A]] e^{-S_G}}$

行列式 $\text{Det}[M[U]]$ 中包含动力学夸克效应

- 上式为一个带权重 $\text{Det}[M[A]] e^{-S_G}$ 的平均, 类似Boltzmann系综平均
- 在有限体积的4维超立方格子上, 自由度个数是可数的, 路径积分具有良好定义

$$\langle f \rangle_\rho = \frac{\int dx \rho(x) f(x)}{\int dx \rho(x)} \longrightarrow \sim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$

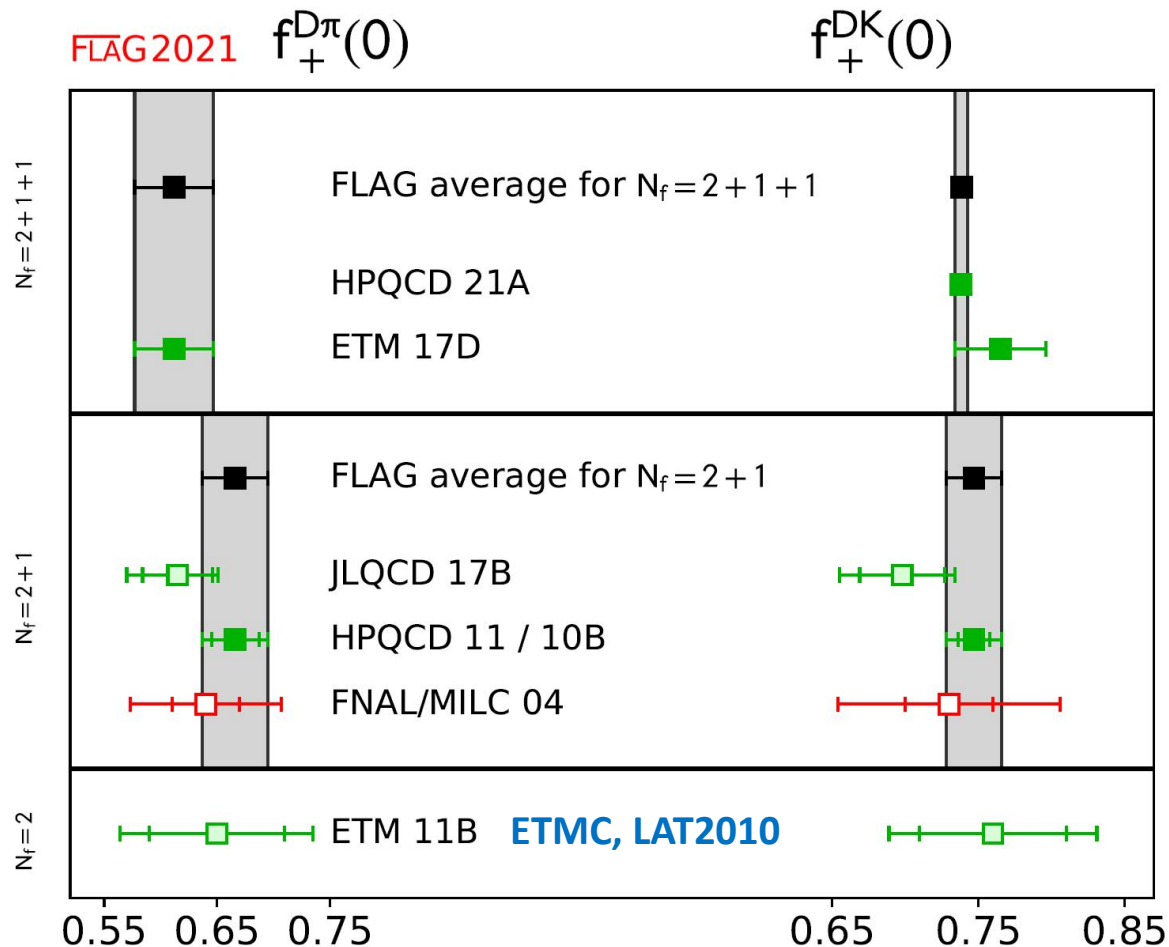


海夸克效应 $\text{Det}[M[U]]$

价夸克传播子 $M^{-1}[U]$

两点关联函数

$f_+(q^2 = 0)$ for $D \rightarrow \pi/K$



2+1+1味结果

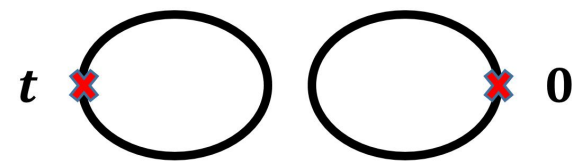
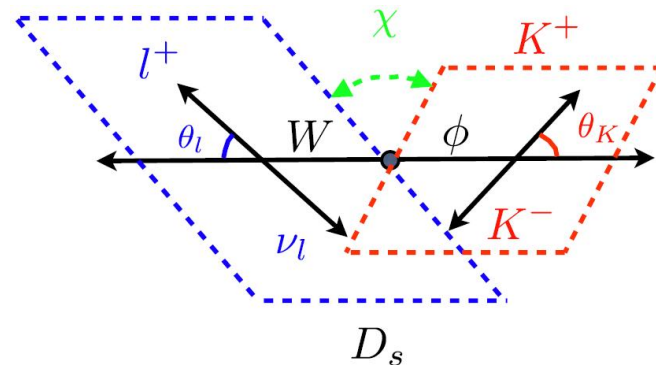
- $f_+^{D\pi}(0) = 0.612(35)$ [ETM 17D: PRD96 (2017) 054514, 1706.03017]
- $f_+^{DK}(0) = 0.7385(44)$ [ETM 17D: PRD96 (2017) 054514, 1706.03017. HPQCD 21A: PRD104 (2021) 034505, 2104.09883]

2+1味结果

- JLQCD 17: LAT2017 [1711.11235]
- FNAL/MILC/HPQCD 04: 一个格距, m_π 大于 500 MeV
- $f_+^{D\pi}(0) = 0.666(29)$ [HPQCD 11, PRD84,114505, 1109.1501]
- $f_+^{DK}(0) = 0.747(19)$ [HPQCD 10B, PRD82,114506, 1008.4562]

D_s 半轻衰变

- D_s 的半轻衰变主要是到 ϕ 、 $\eta^{(\prime)}$
- 但格点计算牵涉到(费米子线)非连通图, 更困难
- $D_s \rightarrow \phi lv$ [HPQCD, PRD90, 1311.6669]
 - 除了在 q^2 -bin中比较截面, 还有更多观测量, $\phi \rightarrow K\bar{K}$
 - 忽略了非连通图贡献(OZI压低)
 - 数据中 ϕ 不衰变; ϕ 宽度较窄, 预期阈效应小
 - 形状因子 V , A_2 , A_1 , A_0 ; z-expansion
 - 2+1味; 两个格距; HISQ价夸克作用量
 - 和BABAR, CLEO $D \rightarrow K^*$ 的结果做比较 (假设spectator quark的影响很小)
- $D_s \rightarrow \eta^{(\prime)} lv$ [Bali, Collins, Durr, Kanamori, PRD91,014503 (2015) 1406.5449]
 - 2+1味; 一个格距: ~ 0.075 fm
 - 两个轻夸克质量点: $m_\pi = 370$ 和 470 MeV
 - 计算了非连通图
 - 用标量算符计算 f_0
 - 单极点ansatz参数化 q^2 依赖



两点函数中的非连通图

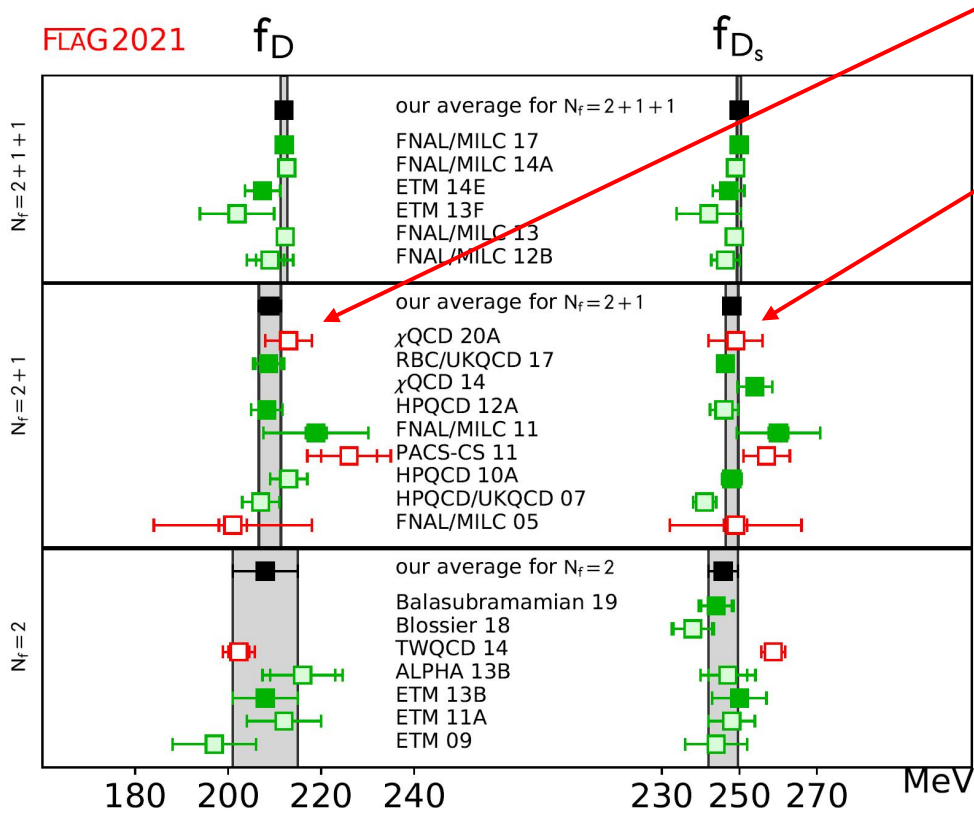
粲介子衰变常数

[24] chiQCD, PRD 92.034517 (2015)

[480] chiQCD, Y. Chen, ..., ZL et al., CPC 45, 023109 (2021)

Collaboration	Ref.	N_f	pu	co	ch	fin	rel	he	f_D	f_{D_s}	f_{D_s}/f_D
χ QCD 14 ^{†□}	[24]	2+1	A	○	○	○	★	✓		254(2)(4)	
χ QCD 20A ^{††}	[480]	2+1	A	■	★	★	★	✓	213(5)	249(7)	1.16(3)

- $N_f = 2 + 1$:
 $f_{D_s} = 248.0(1.6) \text{ MeV}$
 $f_D = 209.0(2.4) \text{ MeV}$
- $N_f = 2 + 1 + 1$:
 $f_{D_s} = 249.9(0.5) \text{ MeV}$
 $f_D = 212.0(0.7) \text{ MeV}$



Flavor Lattice Averaging Group (FLAG)

对正式发表的格点QCD结果做评估

- 连续极限
- 手征外推
- 有限体积
- 重正化常数
- 重夸克作用量

平均获绿色
评分的结果

Color-coding of systematic errors:

- ★ has been estimated in a satisfactory manner.
- reasonable, could be improved.
- no estimation, or unsatisfactory.

FLAG Review, Eur. Phys. J. C (2022) 82, 869, arXiv:2111.09849

BESIII新结果: $f_{D_s} = 251.1(2.4)(3.0) \text{ MeV}$ [PRL127.171801.2021]