

对撞物理

第八章 中性粲介子混合

彭海平

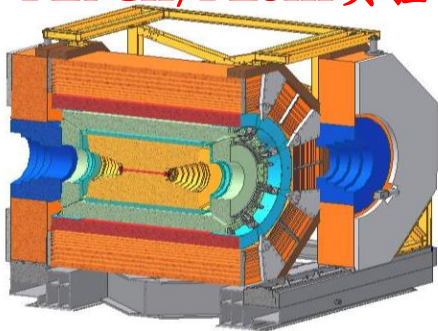
中国科学技术大学

粒子物理研究前沿

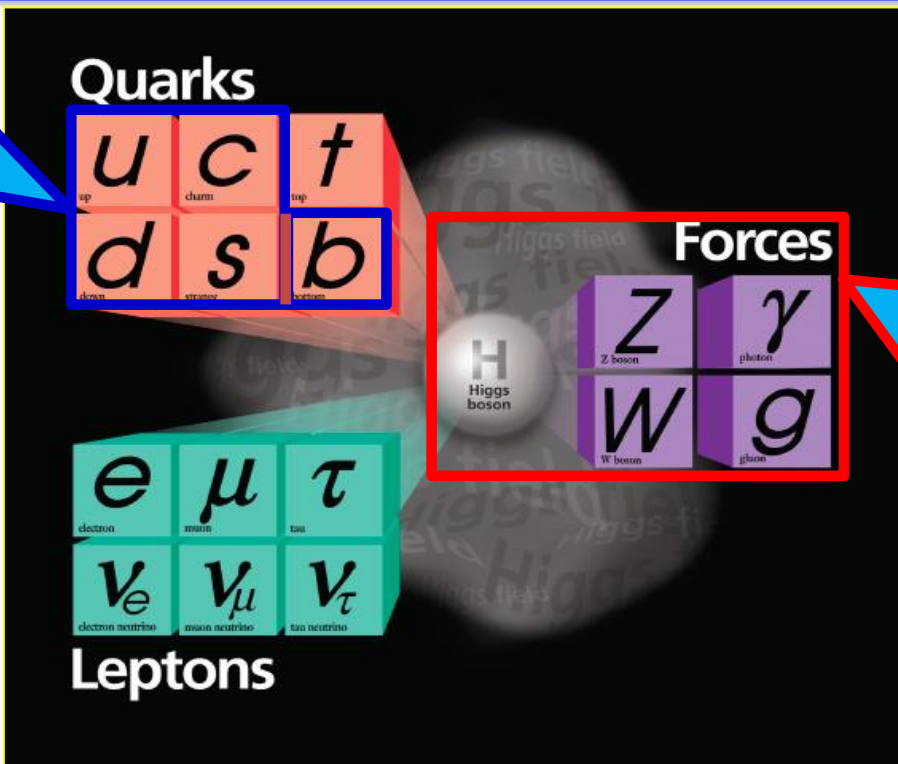
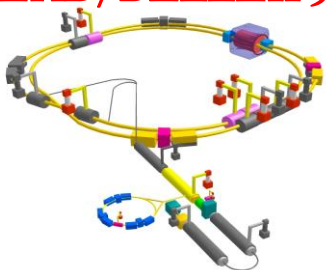
高亮度前沿

- 强子结构与味物理
- 寻找新物理

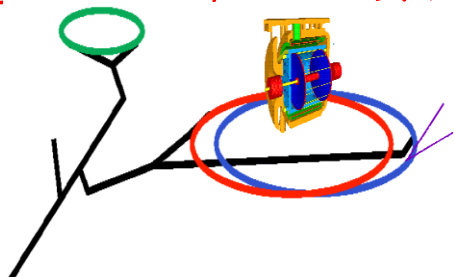
BEPCII/BESIII 实验



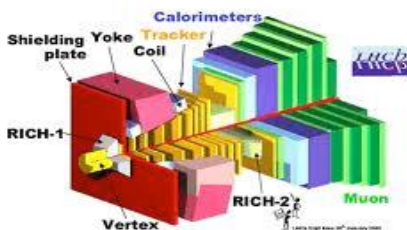
SKEKB/BELLEII 实验



DAFNE/KLEO 实验



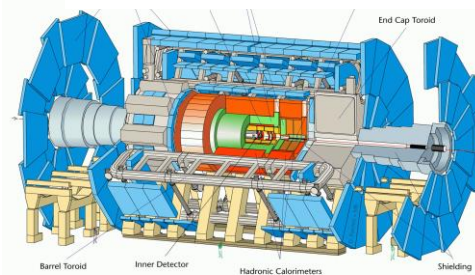
LHC/LHCb 实验



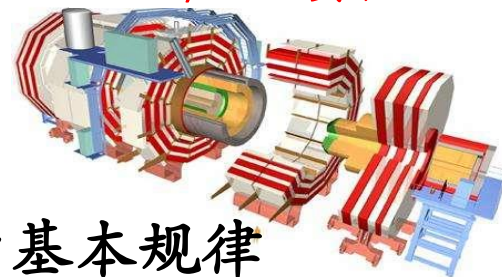
高能量前沿

- 物质质量起源；电弱精确测量；希格斯粒子等
- 寻找新物理

LHC/ATLAS 实验



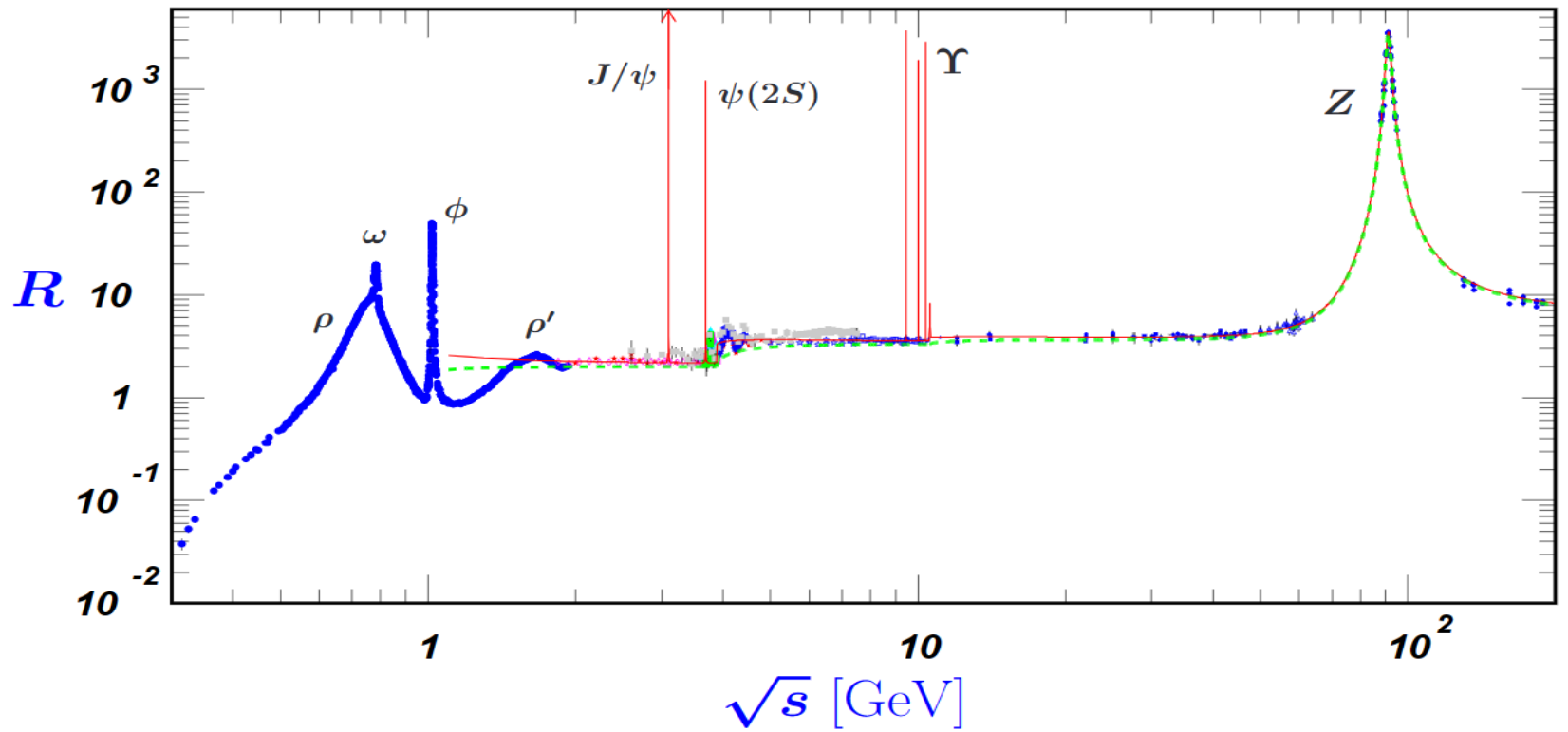
LHC/CMS 实验



两个前沿研究互为补充，相辅相成探索微观世界的基本规律

1. 简介

在正负电子对撞机和强子对撞机上粲粒子有不同的产生机制，粲物理在这些不同加速器的不同能区都得到了广泛的研究。在 e^+e^- 对撞机上质心系能量可以选在 $\psi(3770)$ 阈值之下，阈值处或阈值以上运行来产生粲粒子。在阈值 $\psi(3770)$ 处，即质心系能量略微高于 3770MeV ，则 $\psi(3770)$ 主要通过 $D\bar{D}$ 模式衰变， $D\bar{D}$ 的产生截面约为 8nb ， $D^0\bar{D}^0$ 或 D^+D^- 对之间是量子关联的，可以忽略对 D 介子衰变时间结构的研究。如果标记了其中的一个 $D(\bar{D})$ ，其余的末态粒子一定是由 $\bar{D}(D)$ 衰变而来的。该研究模式最初是由 SLAC 的 SPEAR 正负电子对撞机上的 MARK III 实验组提出的，其后被 CESR-c 对撞机的 CLEO-c 实验以及 BEPCII 的 BESIII 实验采用。在 $\psi(3770)$ 阈值之下，不可能有成对 D 介子的产生，在这一能区适宜于寻找和研究粲偶素态和一些奇特的类粲偶素态。在 B 介子工厂实验，即 BEP-II 对撞机的 BABAR 实验和 KEKB 对撞机的 Belle 实验中，质心系能量位于远高于 $\psi(3770)$ 的 $\Upsilon(4S)$ 态， $\Upsilon(4S)$ 主要衰变到量子关联的 $B^0\bar{B}^0$ 或 B^+B^- 对，末态至少有一个 D^0 介子产生的截面为 1.45nb 。它的正负电子能量不对称性设计所产生的罗伦兹增长，可以使得 D 介子的衰变寿命分辨率提高 $2\sim 4$ 倍。现在更新后的 Super-KEKB 对撞机及 Belle II 探测器已开始调试运行取数，其亮度将提高一个数量级，期待着在对 CP 破坏和 B 衰变物理精确测量的同时，对 D 物理的研究也定将卓有建树。



1. 简介

强子对撞机 LHC 的运行将粲物理的研究推到了一个新的高度。 $c\bar{c}$ 对在 7TeV 质心能量下的产生截面约为 6mb, 比 $\Upsilon(4S)$ 共振态阈值的 e^+e^- 对撞机高 6 个量级。这相当于在 LHCb 实验的接受度下 D^0 的产生截面为 1.4mb, 比 CDF 实验要高得多, 它在 $\sqrt{s} = 1.96\text{TeV}$ 探测器接收区间的截面仅为 $13\mu\text{b}$ 。表 7.1 给出了各种产生机制的比较。在强子对撞机 LHC 中, 胶子部分的贡献占了很大的份额, 由于对撞的两个部分子携带的能量一般不相等, 所以也是非对称性的对撞, 且质心系能量要远小于 pp 对撞的质心系能量, 洛伦兹增长有利于研究和衰变时间相关的物理。LHC 上 $c\bar{c}$ 的产生截面约占总非弹性截面的 10%, 因而在强子对撞环境下本底水平还是相对比较低的。

| 实验 | 年代 | 质心系能量 (\sqrt{s}) | 截面 $\sigma_{acc}(D^0)$ | 亮度 (L) | $n(D^0)$ |
|--------|-----------|----------------------|------------------------|---------------|----------------------|
| CLEO-c | 2003-2008 | 3.77 GeV | 8 nb | $0.5fb^{-1}$ | 4.0×10^6 |
| BESIII | 2010-2011 | 3.77 GeV | 8 nb | $3fb^{-1}$ | 2.4×10^7 |
| BABAR | 1999-2008 | 10.6 GeV | 1.45 nb | $500fb^{-1}$ | 7.3×10^8 |
| Belle | 1999-2010 | 10.6-10.9 GeV | 1.45 nb | $1000fb^{-1}$ | 1.5×10^9 |
| CDF | 2001-2011 | 2 TeV | $13 \mu\text{b}$ | $10fb^{-1}$ | 1.3×10^{11} |
| LHCb | 2011 | 7 TeV | 1.4 mb | $1fb^{-1}$ | 1.4×10^{12} |
| LHCb | 2012 | 8 TeV | 1.6 mb | $2fb^{-1}$ | 3.2×10^{12} |

1. 简介

粲夸克物理的研究经历了多个阶段^[1]。 J/ψ 粒子的发现是第一个阶段，确认了 GIM 机制预言的第四种夸克，即粲夸克的存在，解释了奇异数改变的中性流不存在，以及与之相关的中性 K 介子混合。在标准模型和超出标准模型的理论框架下对一系列包含粲夸克粒子的寻找和研究，旨在探索强相互作用和弱相互作用的物理规律。粲夸克只能通过辐射出 W^\pm 玻色子进行弱衰变，到 s 或 d 夸克，而粲偶素介子则可以通过粲夸克和反粲夸克的湮灭而衰变。因此仅含一个粲夸克的所谓开粲粒子是研究束缚态中上型夸克弱衰变的最佳场所。之后一系列 D_{sJ} 态粒子被发现，它们难以被纳入基于 QCD 理论的夸克模型预言。激发态的粲偶素和开粲粒子态是研究 QCD 理论的最佳实验室。2007 年 Belle^[2] 和 BABAR^[3] 实验首次测量到了中性粲介子的混合，开启了粲物理研究的一个新阶段。理论上给出了更为精确的标准模型预言，实验物理学家对粲粒子混合和 CP 对称性破坏进行了大量的精确的测量。

2003 年 Belle 实验首次发现了一个奇特的类粲偶素粒子态 $X(3872)$ ^[5]，很快被 CDF、D0 和 BABAR 实验确认，激发起了人们对类粲偶素粒子态寻找和研究的兴趣。从 2013 年起，带电的类粲偶素态 $Z_c^\pm(3900)$ 到 $J/\psi\pi^\pm$ 衰变的发现更是开启了粲夸克物理研究的新阶段^[6, 7]，BESIII 实验也在 $D^*\bar{D}^*$ 阈值之上观测到类似的类粲偶素态 $Z_c^\pm(4025)$ ^[8]。现在一系列的所谓 XYZ 粒子已经在实验上被发现，它们都是通过粲偶素加其他非粲粒子的重建得到的。这些类粲偶素态都很难用两个或三个组分夸克的粒子态来解释，目前还没有一个成功的模型能解释它们的特征。

2. 中性赝标量介子的含时衰变

对于中性介子态 P^0 和 \bar{P}^0 到末态 f 和 \bar{f} 的衰变, 可以定义衰变振幅

$$\begin{cases} \mathcal{A}_f = \langle f | \mathcal{H} | P^0 \rangle, & \bar{\mathcal{A}}_f = \langle f | \mathcal{H} | \bar{P}^0 \rangle \\ \mathcal{A}_{\bar{f}} = \langle \bar{f} | \mathcal{H} | P^0 \rangle, & \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = \langle \bar{f} | \mathcal{H} | \bar{P}^0 \rangle \end{cases}$$

以及复参数 Λ_f 和 $\Lambda_{\bar{f}}$,

$$\Lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f}, \quad \bar{\Lambda}_f = \Lambda_f^{-1}, \quad \Lambda_{\bar{f}} = \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}}{\mathcal{A}_{\bar{f}}}, \quad \bar{\Lambda}_{\bar{f}} = \Lambda_{\bar{f}}^{-1}$$

一般地, \mathcal{A} 和 $\bar{\mathcal{A}}$ 之间会有强相互作用的相位差 δ , 以末态 \bar{f} 为例,

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\bar{f}} = \sum_n \langle \bar{f} | n \rangle \langle n | \mathcal{H} | P^0 \rangle \equiv \sum_n c_n b_n e^{i\delta_1} \\ \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = \sum_n \langle \bar{f} | n \rangle \langle n | \mathcal{H} | \bar{P}^0 \rangle \equiv \sum_n c_n \bar{b}_n e^{i\delta_2} \end{cases}$$

则有

$$\mathcal{A}_{\bar{f}} \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}^* = |\mathcal{A}_{\bar{f}}| |\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}| e^{-i\delta}, \quad \delta = \delta_2 - \delta_1$$

2. 中性赝标量介子的含时衰变

不难导出在 CPT 守恒的约定下，在 t 时刻的 $|P^0(t)\rangle(|\bar{P}^0(t)\rangle)$ 态衰变到 $|f\rangle(|\bar{f}\rangle)$ 的振幅，

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f|\mathcal{H}|P^0(t)\rangle = f_+(t)\mathcal{A}_f + \frac{q}{p} \cdot f_-(t)\bar{\mathcal{A}}_f = [f_+(t) + f_-(t)\Lambda_f]\mathcal{A}_f \\ \langle \bar{f}|\mathcal{H}|P^0(t)\rangle = f_+(t)\mathcal{A}_{\bar{f}} + \frac{q}{p} \cdot f_-(t)\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = \frac{q}{p}[f_+(t)\bar{\Lambda}_{\bar{f}} + f_-(t)]\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} \\ \langle \bar{f}|\mathcal{H}|\bar{P}^0(t)\rangle = f_+(t)\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} + \frac{p}{q} \cdot f_-(t)\mathcal{A}_{\bar{f}} = [f_+(t) + f_-(t)\bar{\Lambda}_{\bar{f}}]\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} \\ \langle f|\mathcal{H}|\bar{P}^0(t)\rangle = f_+(t)\bar{\mathcal{A}}_f + \frac{p}{q} \cdot f_-(t)\mathcal{A}_f = \frac{p}{q}[f_+(t)\Lambda_f + f_-(t)]\mathcal{A}_f \end{array} \right.$$

2. 中性赝标量介子的含时衰变

作为一个例子，给出 $t = 0$ 时的纯 $|P^0\rangle$ 态在 t 时刻衰变到 \bar{f} 的振幅为

$$\begin{aligned}\langle \bar{f} | \mathcal{H} | P^0(t) \rangle &= \frac{e_1(t) + e_2(t)}{2} \langle \bar{f} | \mathcal{H} | P^0 \rangle + \frac{q}{p} \frac{e_1(t) - e_2(t)}{2} \langle \bar{f} | \mathcal{H} | \bar{P}^0 \rangle \\ &= f_+(t) \mathcal{A}_{\bar{f}} + \frac{q}{p} f_-(t) \cdot \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}\end{aligned}$$

注意到

$$e_{1,2} = e^{-i(M_{1,2} - i\Gamma_{1,2})t} = e^{-iMt} e^{-\Gamma t} e^{\pm(ix+y)\Gamma t/2}$$

其中中性赝标量介子的混合参数 x 和 y 是相同的，可以将其从上式中删除。于是 $f_{\pm}(t)$ 可用双曲函数表示为

$$\begin{cases} f_+(t) = \frac{1}{2}[e_1(t) + e_2(t)] = e^{-\Gamma t/2} \cosh \left[\frac{1}{2}(ix + y)\Gamma t \right] \\ f_-(t) = \frac{1}{2}[e_1(t) - e_2(t)] = e^{-\Gamma t/2} \sinh \left[\frac{1}{2}(ix + y)\Gamma t \right] \end{cases}$$

2. 中性膺标量介子的含时衰变

容易证明如下关系式成立：

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_+(t)|^2 = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}[\cosh(y\Gamma t) + \cos(x\Gamma t)] \approx e^{-\Gamma t} \\ |f_-(t)|^2 = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}[\cosh(y\Gamma t) - \cos(x\Gamma t)] \approx e^{-\Gamma t} \frac{x^2 + y^2}{4} \cdot (\Gamma t)^2 \\ f_+(t)f_-^*(t) = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}[\sinh(y\Gamma t) - i\sin(x\Gamma t)] \approx e^{-\Gamma t} \frac{y - ix}{2} \cdot \Gamma t \\ f_+^*(t)f_-(t) = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t}[\sinh(y\Gamma t) + i\sin(x\Gamma t)] \approx e^{-\Gamma t} \frac{y + ix}{2} \cdot \Gamma t \end{array} \right.$$

这里的近似基于 $A_r^{\text{DCS}} \ll \bar{A}_r^{\text{CF}}$, $|q/p| = 1$ 和 $|x|, |y| \ll 1$ 。

2. 中性赝标量介子的含时衰变

不难导出中性赝标量介子的含时衰变率，

$$\begin{aligned}
 \Gamma(P^0(t) \rightarrow f) &= |\mathcal{A}_f|^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{1 + |\Lambda_f|^2}{2} \cosh(y\Gamma t) + \Re(\Lambda_f) \sinh(y\Gamma t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - |\Lambda_f|^2}{2} \cos(x\Gamma t) - \Im(\Lambda_f) \sin(x\Gamma t) \right] \\
 \Gamma(P^0(t) \rightarrow \bar{f}) &= |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \left| \frac{q}{p} \right|^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{1 + |\bar{\Lambda}_f|^2}{2} \cosh(y\Gamma t) + \Re(\bar{\Lambda}_f) \sinh(y\Gamma t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1 - |\bar{\Lambda}_f|^2}{2} \cos(x\Gamma t) + \Im(\bar{\Lambda}_f) \sin(x\Gamma t) \right] \\
 \Gamma(\bar{P}^0(t) \rightarrow \bar{f}) &= |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{1 + |\bar{\Lambda}_f|^2}{2} \cosh(y\Gamma t) + \Re(\bar{\Lambda}_f) \sinh(y\Gamma t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - |\bar{\Lambda}_f|^2}{2} \cos(x\Gamma t) - \Im(\bar{\Lambda}_f) \sin(x\Gamma t) \right] \\
 \Gamma(\bar{P}^0(t) \rightarrow f) &= |\mathcal{A}_f|^2 \left| \frac{p}{q} \right|^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{1 + |\Lambda_f|^2}{2} \cosh(y\Gamma t) + \Re(\Lambda_f) \sinh(y\Gamma t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1 - |\Lambda_f|^2}{2} \cos(x\Gamma t) + \Im(\Lambda_f) \sin(x\Gamma t) \right] \tag{7.10}
 \end{aligned}$$

初态 $|P^0\rangle$ ($|\bar{P}^0\rangle$) 到末态 f 或 \bar{f} 的含时衰变按 $e^{-\Gamma t}$ 规律演化，混合参数 x 和 y 则定义了中性介子混合的特征。混合参数 y 改变某些瞬时振幅成分的寿命，而 x 则引入一个正弦波动，决定了介子态的振荡频率。因此，通过对 $|P^0\rangle$ ($|\bar{P}^0\rangle$) 衰变的含时研究可以测量混合参数 x 和 y 。图 7.1 给出了各中性赝标介子系统质量和宽度本征态的差异，以及 t 时间后初始中性介子演化为介子态或反介子态的概率。

2. 中性赝标量介子的含时衰变

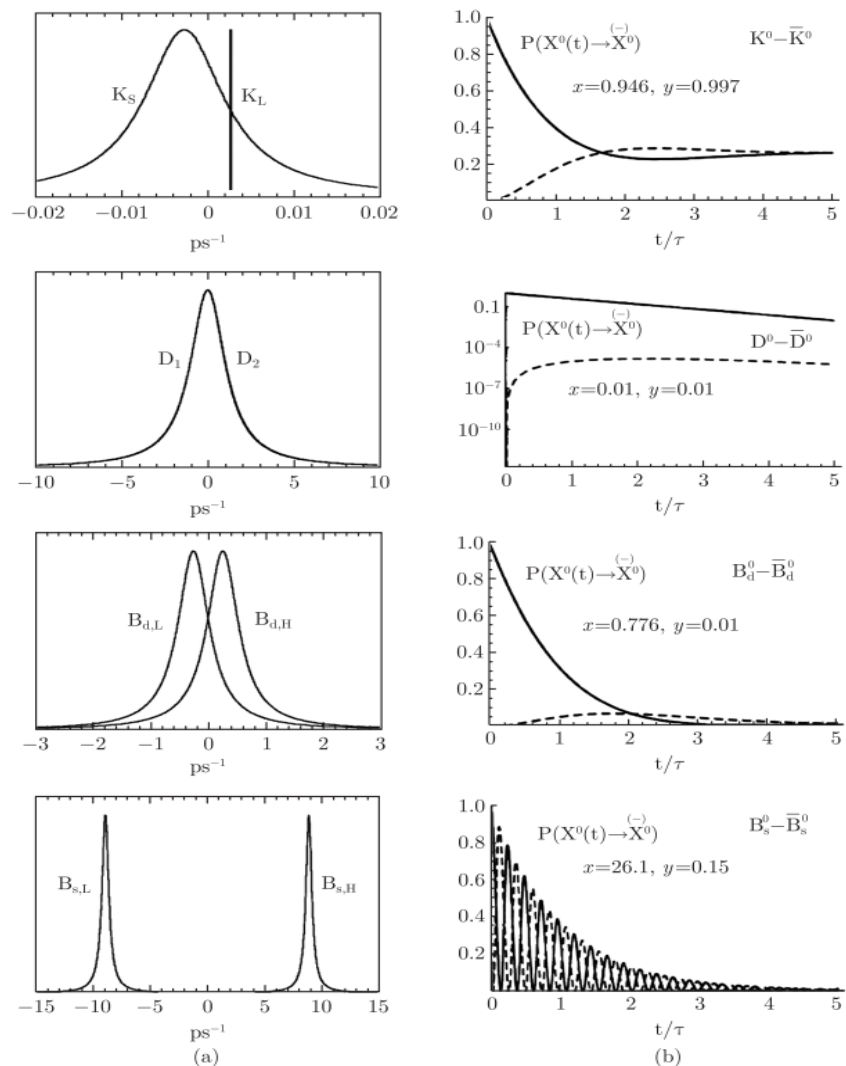


图 7.1 (a) 各中性赝标量介子系统质量和宽度本征态的差异; (b) 对相应的混合参数值, 忽略 CP 破坏, 初始中性介子态在 t 时间后演化为介子态 (实线) 或反介子态 (虚线) 的概率

3. D^0 - \bar{D}^0 混合

$D^0 - \bar{D}^0$ 混合是味改变的中性流过程，它的高阶过程圈图中可以有重夸克的贡献，其振幅对圈图中所有弱耦合的夸克味敏感，因此可以期待 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合的测量对发现新物理具有很大的潜力。混合参数的大小也会影响到幺正三角形 γ 角的测量。

从图 7.1(a) 中可以看出粲介子中的混合参数和 K 或 B 介子相比较具有很大的差异。在中性 K 介子系统中 $y \approx 1$ ，两个质量本征态的寿命差很大，且 $x \approx 1$ 可以产生足够大的正旋振荡频率。在 B 介子系统中两个中性 B 介子的寿命差虽然比较小，但是它们有足够大的 x 值，特别是子 B_s^0 ，很大的 x 值导致快速的振荡，要求实验的精度比较高。根据标准模型的估计，粲介子系统中的混合现象和 CP 破缺效应都非常小，是唯一 x 和 y 都远小于 1 的系统，它的两个本征态几乎是完全重叠在一起的。

3. D^0 - D^0 bar

图 6.1 中的 D 介子箱图给出了短程相互作用夸克模型的描述，图中交换的是下型夸克 (b, s, d)，它们在箱图中的贡献很小。由于 GIM 机制混合振幅对 ΔM 和 $\Delta\Gamma$ 的贡献被 $m_{b,s,d}^2/m_W^2$ 压制。其中 b 夸克的作用尤其小，除了因为 $m_b^2/m_W^2 \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ 之外， $|V_{ub}V_{cb}^*|^2/|V_{us}V_{cs}^*|^2 \sim \mathcal{O}(10^{-6})$ ，箱图中贡献最大的倒是 s 夸克。

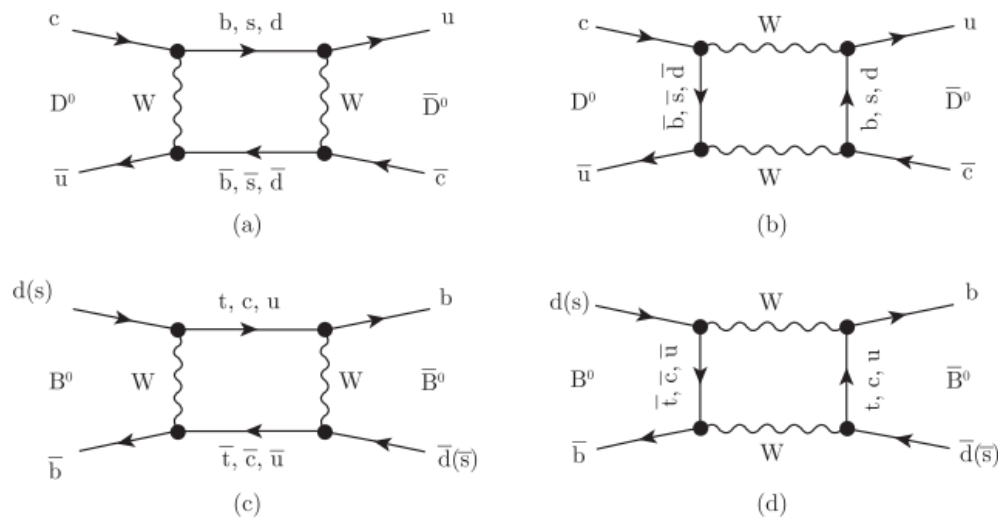


图 6.1 $D^0 - \bar{D}^0$ 和 $B_{d,s}^0 - \bar{B}_{d,s}^0$ 混合短距离相互作用机制的箱图

3. D^0 - \bar{D}^0 bar

将式 (6.10) 的薛定谔方程应用于 $D^0 - \bar{D}^0$ 系统有

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |D^0(t)\rangle \\ |\bar{D}^0(t)\rangle \end{pmatrix} = \left(M - i \frac{\Gamma}{2} \right) \begin{pmatrix} |D^0(t)\rangle \\ |\bar{D}^0(t)\rangle \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

CPT 不变性意味着 $M_{11} = M_{22}$ 和 $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$ ，在标准模型的微扰展开理论中非对角的元素可表示为^[9]

$$\begin{aligned} \left(M - \frac{i}{2} \Gamma \right)_{12} &= \frac{1}{2m_D} \langle D^0 | \mathcal{H}_w^{\Delta C=2} | \bar{D}^0 \rangle \\ &+ \frac{1}{2m_D} \sum_n \frac{\langle D^0 | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | \bar{D}^0 \rangle}{m_D - E_n + i\epsilon} \end{aligned} \quad (7.12)$$

其中， $\mathcal{H}_w^{\Delta C=2}$ 和 $\mathcal{H}_w^{\Delta C=1}$ 是电荷宇称改变 $\Delta C = 2$ 和 $\Delta C = 1$ 的弱作用有效拉氏量。中间强子态 $|n\rangle$ 中可以包含 $\Delta C = 1$ 的过程。式 (7.12) 右边第一项只对 M_{12} 有贡献，对新物理敏感；第二项对 M_{12} 和 Γ_{12} 都有贡献。短程 $\Delta C = 2$ 的跃迁由箱图实现，在 m_c 能标，有效的哈密顿量可近似写为^[10]

$$\mathcal{H}_w^{\Delta C=2} = \frac{G_F^2 m_c^2}{4\pi^2} |V_{cs}^* V_{cd}|^2 \frac{(m_s^2 - m_d^2)^2}{m_c^4} (\mathcal{O} + 2\mathcal{O}') \quad (7.13)$$

其中的算子 \mathcal{O} 和 \mathcal{O}' 为

$$\mathcal{O} \equiv \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) c \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) c, \quad \mathcal{O}' \equiv \bar{u} (1 + \gamma_5) c \bar{u} (1 + \gamma_5) c \quad (7.14)$$

3. D^0 - \bar{D}^0 bar

上式表明振幅是双卡比博压低 (DCS) 过程 ($V_{cs}^*V_{cd}$), 其中 $(m_s^2 - m_d^2)/m_c^4$ 是 GIM 压制因子。算子的矩阵元可参数化为

$$\langle D^0 | \mathcal{O} | \bar{D}^0 \rangle = \frac{8}{3} m_D^2 f_D^2 B_D, \quad \langle D^0 | \mathcal{O}' | \bar{D}^0 \rangle = -\frac{5}{3} \left(\frac{m_D}{m_c} \right)^2 m_D^2 f_D^2 B'_D \quad (7.15)$$

在真空插入近似下取 $B_D = B'_D = 1$, 则可给出箱图对 \mathcal{CP} 本征态质量差的贡献为

$$\Delta m_D^{\text{box}} \simeq 1.4 \times 10^{-18} \text{GeV} \left(\frac{m_s}{0.1 \text{GeV}} \right)^4 \left(\frac{f_D}{0.2 \text{GeV}} \right)^2 \quad (7.16)$$

对于典型的 f_D 和 m_s 取值, 箱图对混合参数 x 的贡献为 $x_{\text{box}} \simeq (\text{个位数} \times 10^{-6}) \sim 10^{-5}$ 。箱图对 $\Delta\Gamma$ 的贡献更被 m_s^2 进一步压制, 致使 y_{box} 被压低到 10^{-7} 的数量级。若假定 $SU(3)$ 的味对称性 (即 $m_s = m_d$), GIM 压制因子为零, 这时 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合消失。

3. D^0 - \bar{D}^0 bar

由上面的讨论可知， $\Delta C = 2$ 的短程力对混合参数的贡献是很小的，因此需要进一步考虑强子中间态 $|n\rangle$ 的长程力效应，如图 7.2所示。如果忽略式 (7.12) 中 $\Delta C = 2$ 算子的短程力贡献，则可导得标准模型对 Δm 和 $\Delta\Gamma$ 的贡献为

$$\Delta m = \frac{1}{2m_D} \mathbb{P} \sum_n \frac{\langle \bar{D}^0 | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | D^0 \rangle + \langle D^0 | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | \bar{D}^0 \rangle}{m_D - E_n}$$

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{2m_D} \sum_n [\langle \bar{D}^0 | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | D^0 \rangle + \langle D^0 | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | n \rangle \langle n | \mathcal{H}_w^{\Delta C=1} | \bar{D}^0 \rangle] \cdot 2\pi\delta(m_D - E_n) \quad (7.17)$$



图 7.2 SM 模型中 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合长程力的示意图

3. D^0 - \bar{D}^0 bar

长程力是非微扰的，其对 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合的贡献不能由第一定理出发进行计算。实际上在中性 D 介子衰变中 $SU(3)$ 对称性有很大的破缺，该破缺的两阶效应使得非零的 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合值增高，近似有^[12]

$$x \sim y \sim \sin^2 \theta_C \times [SU(3) \text{ 破缺}]^2 \quad (7.18)$$

有大量的文献对 x 和 y 进行了标准模型和超出标准模型的估计，给出 $x, y \sim 10^{-2} \sim 10^{-3}$ 数量级，增大了许多，不过仍然是非常小的。理论学家一般认为 $x < y$ ，如果实验上发现 $x > y$ 就可能是新物理对 x 贡献的迹象。因此对 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合及其 CP 破坏的精确测量就为揭示来自标准模型之外的新物理贡献提供了可能。目前已有多个实验在多个物理过程中观测到了 $D^0 - \bar{D}^0$ 的混合现象，以及 CP 破缺效应。下面就几个典型的实验做一简单介绍。

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

Belle 和 BABAR 实验中 D 介子来自于 e^+e^- 对撞的连续过程中产生的 $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$, 可用低动量 π 的正负电荷标记 D^* 衰变产生的是 D^0 或 \bar{D}^0 , 通常将该 π 介子称为软 π , 记为 π_s 。

$D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ 衰变 (共轭过程为 $\bar{D}^0 \rightarrow K^+\pi^-$) 是卡比博允许的, 通常称为正确符号 (RS) 的过程, 而 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 则被称为错误符号 (WS) 的过程。图 7.3 给出了 WS 和 RS 过程的衰变机制示意图。WS 过程可通过两种机制实现, 一种是直接由双卡比博压制衰变 (DCSD) 过程实现, 另一种是先经混合机制到反粒子, 接着由卡比博允许的机制实现。而 RS 过程则是由卡比博允许的机制, 或由混合机制紧接着是 DCSD 压制机制实现。两者的衰变寿命是不同的。

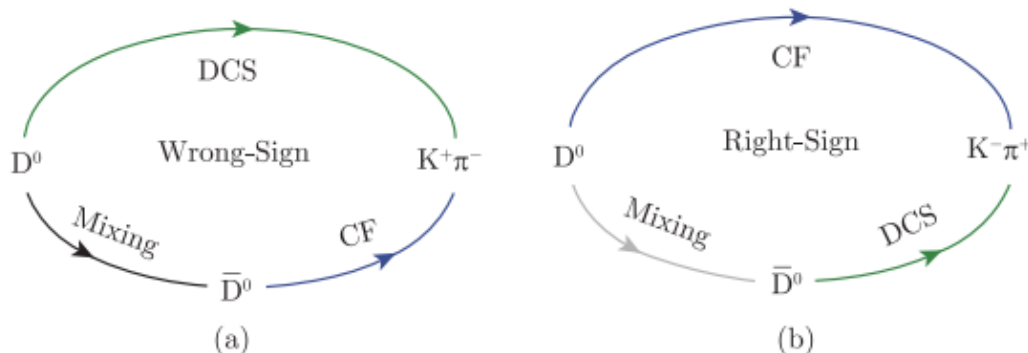


图 7.3 WS 道 (a) 和 RS 道 (b) 的衰变机制示意图

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

WS 过程可由式 (7.10) 取母粒子态 $P^0(t)$ 为 $D^0(t)$, 末态 $f = K^-\pi^+, \bar{f} = K^+\pi^-$ 得到。由于 $\Delta M, \Delta\Gamma \ll \Gamma$, 且 DCSD 机制使得 $|\mathcal{A}_f|, |\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}| \ll 1$, 公式可近似表示为

$$\Gamma(D^0(t) \rightarrow K^+\pi^-) = |\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}|^2 \left| \frac{q}{p} \right|^2 e^{-\Gamma t} \left\{ |\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}|^2 + [\Re(\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}})y + \Im(\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}})x] \Gamma t + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(\Gamma t)^2 \right\} \quad (7.19)$$

$$\Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow K^-\pi^+) = |\mathcal{A}_f|^2 \left| \frac{p}{q} \right|^2 e^{-\Gamma t} \left\{ |\mathcal{A}_f|^2 + [\Re(\mathcal{A}_f)y + \Im(\mathcal{A}_f)x] \Gamma t + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)(\Gamma t)^2 \right\} \quad (7.20)$$

RS 过程可以看作是简单的指数衰减, 即 $\Gamma = |\mathcal{A}_{K^-\pi^+}|e^{-\Gamma t}$ 。

若忽略微小的 CP 破坏效应, 则有

$$|\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}| = |\mathcal{A}_f|, \quad \left| \frac{q}{p} \right| = 1, \quad \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = \mathcal{A}_f \quad (7.21)$$

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

根据前面定义的衰变振幅,

$$\begin{cases} \mathcal{A}_f \equiv \langle K^-\pi^+ | \mathcal{H} | D^0 \rangle = |\mathcal{A}_f| e^{i\delta_R}, & \mathcal{A}_{\bar{f}} \equiv \langle K^+\pi^- | \mathcal{H} | D^0 \rangle = |\mathcal{A}_{\bar{f}}| e^{i\delta_W} \\ \delta = \delta_R - \delta_W \end{cases} \quad (7.22)$$

δ_R 和 δ_W 分别指“正确符号”和“错误符号”振幅的强相角。进而可以有参数化

$$\mathcal{A}_{\bar{f}}/\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_{\bar{f}}/\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} = -\sqrt{R_D} e^{-i\delta}, \quad |\mathcal{A}_{\bar{f}}/\mathcal{A}_f| \sim \mathcal{O}(\tan^2 \theta_c) \quad (7.23)$$

无量纲的正数 R_D 是 DCSD 相对于 CFD 的事例率之比, δ 是 DCSD 相对于 CFD 振幅的强相角差。

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

利用式 (7.21)，将式 (7.19) 除以 $|\mathcal{A}_f|^2$ ，可以得到 WS 相对于 RS 过程的衰变率之比，

$$\begin{aligned}
 r_{\text{WS}}(t) &= \frac{\Gamma(D^0(t) \rightarrow K^+\pi^-)}{\Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow K^+\pi^-)} = \frac{\Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0(t) \rightarrow K^-\pi^+)} \\
 &= \left[R_D + \sqrt{R_D}(y \cos \delta - x \sin \delta)\Gamma t + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\Gamma^2 t^2 \right] e^{-\Gamma t} \\
 &= \left[R_D + \sqrt{R_D}y'\Gamma t + \frac{1}{4}(x'^2 + y'^2)\Gamma^2 t^2 \right] e^{-\Gamma t} \tag{7.24}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} x' = x \cos \delta + y \sin \delta \\ y' = y \cos \delta - x \sin \delta \end{cases} \tag{7.25}$$

x', y' 将混合参数转动了一个强相角 δ 。式 (7.24) 中第一项来自 DCSD，最后一项来自 CFD，中间项来自 DCSD 和 CFD 的干涉。WS 过程 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 相对于 RS 过程 $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ 的积分事例率之比为

$$\begin{aligned}
 R_{\text{WS}} &= R_D + \sqrt{R_D}y' + (x'^2 + y'^2)/2 \\
 &= R_D + \sqrt{R_D}y' + R_M \tag{7.26}
 \end{aligned}$$

$R_M \equiv \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$ 是混合衰变率相对于 CFD 概率之比。

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

上面的讨论适用于末态含有多个 π 的过程 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-(n\pi)$, 诸如 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^0$, $D^0 \rightarrow K^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 等, 只是这些道的末态会有多个轻强子中间共振态存在, 需要进行达里兹分析甚至是分波分析, 以确定中间共振态的成分和贡献, 给物理分析增加了难度和挑战性。

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

如果 $SU(3)$ 对称性成立, 振幅 $\mathcal{A}_{K^+\pi^-}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}_{K^+\pi^-}$ ($\mathcal{A}_{K^-\pi^+}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}_{K^-\pi^+}$) 之间只相差一个 CKM 矩阵元因子, $\mathcal{A}_{K^+\pi^-} = (V_{cd}V_{us}^*/V_{cs}V_{ud}^*)\bar{\mathcal{A}}_{K^+\pi^-}$ 。特别是 $\mathcal{A}_{K^+\pi^-}$ 和 $\bar{\mathcal{A}}_{K^+\pi^-}$ 具有相同的强相角。B 工厂实验测量了

$$\mathcal{R} = \frac{Br(D^0 \rightarrow K^+\pi^-)}{Br(\bar{D}^0 \rightarrow K^+\pi^-)} \left| \frac{V_{ud}V_{cs}^*}{V_{us}V_{cd}^*} \right|^2 \quad (7.27)$$

其在 $SU(3)$ 对称性下应为 1, 但是测量的世界平均值却为

$$\mathcal{R} = 1.21 \pm 0.03 \quad (7.28)$$

因而 $SU(3)$ 对称性在 $D \rightarrow K\pi$ 过程中是破缺的, 大约在 20% 的水平, 强相角 $\delta_{K\pi}$ 不等于零。BABAR 实验在忽略 CP 破坏的假定下给出的存在混合迹象的测量结果如下^[3]

$$\begin{cases} R_D = (3.03 \pm 0.16 \pm 0.10) \times 10^{-3} \\ x'^2 = (-0.22 \pm 0.30 \pm 0.21) \times 10^{-3} \\ y' = (9.7 \pm 4.4 \pm 3.1) \times 10^{-3} \end{cases} \quad (7.29)$$

显著性为 3.9σ 。

2013 年 LHCb 合作组利用 1.0fb^{-1} 的 pp 对撞实验数据对该道进行测量, 得到了更为精确的结果^[4]

$$\begin{cases} R_D = (3.53 \pm 0.15) \times 10^{-3} \\ x'^2 = (-0.9 \pm 1.3) \times 10^{-4} \\ y' = (7.2 \pm 2.4) \times 10^{-3} \end{cases} \quad (7.30)$$

显著性为 9.1σ 。若要从 x' 和 y' 提取出混合参数 x 和 y , 则需要测量强相角 $\delta_{K\pi}$ 。

3.1 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 含时衰变

测量 $\delta_{K\pi}$ 的最佳方法是使用在 $D\bar{D}$ 产生阈值附近的 e^+e^- 对撞数据, 进行衰变事例的 CP 标记, BESIII 实验在 $\Psi(3770)$ 能区的实验数据对这一研究具有独特的优势。当然从下面将讲到的 $D^0 \rightarrow K^+K^-, \pi^+\pi^-$ 得到的 y_{CP} 和由 $D^0 \rightarrow K_S\pi^+\pi^-$ 得到的 x 和 y , 也能从 x' 和 y' 的测量结果计算出 $\delta_{K\pi}$ 的值。

3.2 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 衰变中的 CP 破坏

$D^0 - \bar{D}^0$ 混合中的 CP 破坏, 即第一类的 CP 破坏, 来自 $|q/p| \neq 1$, 因而可以定义

$$A_M \equiv \frac{|p/q|^2 - |q/p|^2}{|p/q|^2 + |q/p|^2} = \frac{1 - |q/p|^4}{1 + |q/p|^4} \quad (7.31)$$

直接的 CP 破坏, 即第二类 CP 破坏, 则来自 D^0 和 \bar{D}^0 的 DCSD 过程中振幅的差异, 即 $|\mathcal{A}_{K^+\pi^-}/\bar{\mathcal{A}}_{K^-\pi^+}| \neq 1$ 。如果假定 CFD 过程中没有直接的 CP 破坏, 即有 $|\mathcal{A}_{K^-\pi^+}| = |\bar{\mathcal{A}}_{K^+\pi^-}|$, 因此可以定义实参数

$$A_D \equiv \frac{|\mathcal{A}_{K^+\pi^-}|^2 - |\bar{\mathcal{A}}_{K^-\pi^+}|^2}{|\mathcal{A}_{K^+\pi^-}|^2 + |\bar{\mathcal{A}}_{K^-\pi^+}|^2} \quad (7.32)$$

第三类 CP 破坏来自无混合和有混合的衰变中的干涉效应。在 D^0 的 WS 衰变中, 该破坏效应可表示为

$$\frac{\Im(\bar{A}_f)}{\bar{A}_f} \neq \frac{\Im(A_f)}{A_f} \quad \text{即} \quad \arg(\bar{A}_f) \neq \arg(A_f) \quad (7.33)$$

可以通过对 D^0 和 \bar{D}^0 的强相角修正给出对这一效应的参数化描写

$$\arg(\bar{A}_f) = -(\delta + \phi), \quad \arg(A_f) = -(\delta - \phi) \quad (7.34)$$

ϕ 是 q/p 和 \bar{A}_f/A_f 之间的相对弱相角。如果存在超出 SM 的新物理, CP 破坏即使在直接衰变中或混合中没有被观测到, 还是有可能在直接衰变和混合的干涉效应中被观测到。

3.2 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 衰变中的 CP 破坏

为对 CP 破坏给出参数化的描写, 可以定义:

$$\bar{A}_f = -\left|\frac{p}{q}\right| \sqrt{R_D^+} e^{-i(\delta+\phi)}, \quad A_f = -\left|\frac{q}{p}\right| \sqrt{R_D^-} e^{-i(\delta-\phi)} \quad (7.35)$$

代入式 (7.19) 和式 (7.20) 得到

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(D^0(t) \rightarrow K^+\pi^-)}{\Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow K^+\pi^-)} &= R_D^+ + \left|\frac{q}{p}\right| \sqrt{R_D^+} (y' \cos \phi - x' \sin \phi)(\Gamma t) \\ &\quad + \left|\frac{q}{p}\right|^2 \frac{x'^2 + y'^2}{4} (\Gamma t)^2 \\ \frac{\Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0(t) \rightarrow K^-\pi^+)} &= R_D^- + \left|\frac{p}{q}\right| \sqrt{R_D^-} (y' \cos \phi + x' \sin \phi)(\Gamma t) \\ &\quad + \left|\frac{p}{q}\right|^2 \frac{x'^2 + y'^2}{4} (\Gamma t)^2 \end{aligned} \quad (7.36)$$

3.2 $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ 衰变中的 CP 破坏

BABAR 实验组采用了如下的参数化方法测量 CP 破坏^[13]。将式 (7.24) 分别应用于 D^0 和 \bar{D}^0 事例，得到 6 个参数。记 (R_D^+, x'^+, y'^+) 为由 D^0 事例得到的三个参数， (R_D^-, x'^-, y'^-) 为由 \bar{D}^0 得到的。将两者结合起来可组成如下表达式：

$$A_D = (R_D^+ - R_D^-)/(R_D^+ + R_D^-), \quad A_M = (R_M^+ - R_M^-)/(R_M^+ + R_M^-) \quad (7.37)$$

其中 $R_M^\pm = (x'^{\pm 2} + y'^{\pm 2})/2$ 。 A_D 和 A_M 定义了 DCSD 和混合振幅中 CP 破坏，类比于前面的式 (7.32) 和式 (7.31)。实验可观测量和 x', y' 之间具有如下的关系：

$$x'^{\pm} = \left(\frac{1 \pm A_M}{1 \mp A_M} \right)^{1/4} (x' \cos \phi \pm y' \sin \phi) \quad (7.38)$$

$$y'^{\pm} = \left(\frac{1 \pm A_M}{1 \mp A_M} \right)^{1/4} (y' \cos \phi \mp x' \sin \phi) \quad (7.39)$$

注意到 x'^{\pm}, y'^{\pm} 在 $(x' \rightarrow -x', y' \rightarrow -y', \phi \rightarrow \phi + \pi)$ 的联合变换下具有不变性，为避免这种符号标记的不确定性，可将 ϕ 限定在 $|\phi| < \pi/2$ 区间。

从 (x'^+, y'^+, x'^-, y'^-) 到 $(x', y', |q/p|, \phi)$ 是唯一的，除非是当 $(x'^+, y'^+) = (0, 0)$ 或者 $(x'^-, y'^-) = (0, 0)$ 时 ϕ 角不能确定。BABAR 实验在 2007 年^[3] 给出的 CP 破坏允许下的拟合结果为

$$\begin{cases} R_D = \sqrt{R_D^+ R_D^-} = (3.03 \pm 0.16 \pm 0.10) \times 10^{-3} \\ A_D = -0.021 \pm 0.052 \pm 0.015 \end{cases} \quad (7.40)$$

当时并没有看到存在 CP 破坏的证据。

3.3 $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ 过程的量子关联效应测强相角 $\delta_{K\pi}$

在 $\psi(3770)$ 能区 $\psi(3770)$ 基本全部衰变到 $D\bar{D}$ 对。玻色-爱因斯坦统计要求 $D\bar{D}$ 的电荷宇称 $C = -1$ ，由于末态的 CP 负相关特征，如果其中一个 D 衰变到具有确定 CP 量子数的末态，那么另一个 D 的 CP 特征就被标记了。例如一个 D 态衰变到 $CP = -1$ 的 $K_S^0\pi^0$ ，那么另一个 D 态即被标记为 $CP = +1$ 的态。这就使得测量分支比 $Br(D_{\pm} \rightarrow K^-\pi^+)$ ，进而测量由式 (7.22) 定义的强相位差 $\delta_{K\pi}$ 成为可能。按照 D_{\pm} 的定义可以写出如下三角形关系式：

$$\sqrt{2}\mathcal{A}(D_{\pm} \rightarrow K^-\pi^+) = \mathcal{A}(D^0 \rightarrow K^-\pi^+) \pm \mathcal{A}(\bar{D}^0 \rightarrow K^-\pi^+) \quad (7.41)$$

这意味着下式成立：

$$1 \pm 2\sqrt{R_D} \cos \delta_{K\pi} = 2 \frac{Br(D_{\pm} \rightarrow K^-\pi^+)}{Br(D^0 \rightarrow K^-\pi^+)} \quad (7.42)$$

这里忽略了微小的 CP 破坏效应。如果测量了 D_+ 和 D_- 的衰变， $\cos \delta_{K\pi}$ 即可由下面的不对称性给出：

$$\cos \delta_{K\pi} = \frac{Br(D_+ \rightarrow K^-\pi^+) - Br(D_- \rightarrow K^-\pi^+)}{2\sqrt{R_D} Br(D^0 \rightarrow K^-\pi^+)} \quad (7.43)$$

3.3 $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ 过程的量子关联效应测强相角 $\delta_{K\pi}$

在忽略 CP 破坏效应下，还可以导出强相位差 $\delta_{K\pi}$ 与式 (7.26) 定义的 R_{WS} 之间有如下关系式^[17, 18]：

$$2\sqrt{R_D} \cos \delta_{K\pi} + y = (1 + R_{WS}) \cdot A_{CP \rightarrow K\pi} \quad (7.44)$$

其中的 $A_{CP \rightarrow K\pi}$ 是 $CP = +1$ 和 $CP = -1$ 的 D^0 本征态衰变到 $K^-\pi^+$ 过程的分支比的不对称性，

$$A_{CP \rightarrow K\pi} = \frac{Br(D_+ \rightarrow K^-\pi^+) - Br(D_- \rightarrow K^-\pi^+)}{Br(D_+ \rightarrow K^-\pi^+) + Br(D_- \rightarrow K^-\pi^+)} \quad (7.45)$$

在量子相关的 $\Psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$ 衰变道实验中，衰变分支比可由下式计算：

$$Br(D_{\pm} \rightarrow K\pi) = \frac{n_{K\pi, \pm}}{n_{\pm}} \cdot \frac{\epsilon_{\pm}}{\epsilon_{K\pi, \pm}} \quad (7.46)$$

这里 $n_{\pm}(n_{K\pi, \pm})$ 是单标记 $D \rightarrow CP_{\pm}$ (双标记 $D \rightarrow CP_{\pm}, \bar{D} \rightarrow K\pi$) 的产额， $\epsilon_{\pm}(\epsilon_{K\pi, \pm})$ 则为相应的探测效率。表 7.2 列出了 D 介子的各种不同的衰变模式。

表 7.2 D 介子的各种不同的衰变模式

| 衰变类型 | 衰变模式 |
|-------------|--|
| 味衰变 | $K^-\pi^+, K^+\pi^-$ |
| $CP = +$ 衰变 | $K^+K^-, \pi^+\pi^-, K_S^0\pi^0\pi^0, \pi^0\pi^0, \rho^0\pi^0$ |
| $CP = -$ 衰变 | $K_S^0\pi^0, K_S^0\eta, K_S^0\omega$ |
| 半轻子衰变 | $K^{\mp}e^{\pm}\nu, K^{\mp}\mu^{\pm}\nu$ |

式 (7.42)~(7.44) 三个公式可以独立地用以对 $\cos \delta_{K\pi}$ 的测量。BESIII 实验用的是式 (7.44)，测得 $A_{CP \rightarrow K\pi} = (12.7 \pm 1.3 \pm 0.7) \times 10^{-2}$ ，采用输入值 $R_D = (3.50 \pm 0.04) \times 10^{-3}$ ， $y = (6.7 \pm 0.9) \times 10^{-3}$ 和 $R_{WS} = (3.80 \pm 0.05) \times 10^{-3}$ ，得到 $\cos \delta_{K\pi} = 1.02 \pm 0.11 \pm 0.06 \pm 0.01$ ，其误差分别为统计误差、系统误差和外部输入参数的误差^[17]。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

测量 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合的另一种灵敏反应道是 $D^0(\bar{D}^0) \rightarrow f_{CP}$, f_{CP} 是 CP 本征值 $\eta_{CP} = \pm 1$ 的本征态, 见表 7.2。因而有 $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_{\bar{f}}$, $\bar{\mathcal{A}}_f = \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}$, 其 $A_{f_{CP}}$ 参数化形式可记为

$$A_{f_{CP}} = \frac{q\bar{\mathcal{A}}_{f_{CP}}}{p\mathcal{A}_{f_{CP}}} = -\eta_{CP} \left| \frac{q}{p} \right| \left| \frac{\bar{\mathcal{A}}_{f_{CP}}}{\mathcal{A}_{f_{CP}}} \right| e^{i\phi} \quad (7.47)$$

ϕ 是 q/p 和 $\bar{\mathcal{A}}_f/\mathcal{A}_f$ 之间 CP 破坏的相对弱相角。实验上最容易鉴别的带电粒子道是 $\eta_{CP} = +1$ 的 $f_{CP} = K^+K^-$ 、 $\pi^+\pi^-$ 道, 这时可省略掉公式中的 η_{CP} 。 $D^0(\bar{D}^0) \rightarrow f_{CP}$ 的含时衰变率可表示为

$$\begin{aligned} \Gamma(D^0(t) \rightarrow f_{CP}) = & |\mathcal{A}_{f_{CP}}|^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{1 + |A_{f_{CP}}|^2}{2} \cosh(y\Gamma t) + \frac{1 - |A_{f_{CP}}|^2}{2} \cos(x\Gamma t) \right. \\ & \left. + \Re(A_{f_{CP}}) \sinh(y\Gamma t) - \Im(A_{f_{CP}}) \sin(x\Gamma t) \right] \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f_{CP}) = & |\bar{\mathcal{A}}_{f_{CP}}|^2 e^{-\Gamma t} \left[\frac{1 + |A_{f_{CP}}^{-1}|^2}{2} \cosh(y\Gamma t) + \frac{1 - |A_{f_{CP}}^{-1}|^2}{2} \cos(x\Gamma t) \right. \\ & \left. + \Re(A_{f_{CP}}^{-1}) \sinh(y\Gamma t) - \Im(A_{f_{CP}}^{-1}) \sin(x\Gamma t) \right] \end{aligned} \quad (7.49)$$

由于混合过程很慢, 如果暂时忽略直接的 CP 破坏, 可将式 (7.47) 的 $A_{f_{CP}}$ 参数化简化为

$$A_{f_{CP}} = -\eta_{CP} \left| \frac{q}{p} \right| e^{i\phi} \quad (7.50)$$

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

则式 (7.48) 和式 (7.49) 可近似表示为

$$\Gamma(D^0(t) \rightarrow f_{CP}) = e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{f_{CP}}|^2 \left[1 - \eta_{CP} \left| \frac{q}{p} \right| (y \cos \phi - x \sin \phi) \Gamma t \right] \quad (7.51)$$

$$\Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f_{CP}) = e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{f_{CP}}|^2 \left[1 - \eta_{CP} \left| \frac{p}{q} \right| (y \cos \phi + x \sin \phi) \Gamma t \right] \quad (7.52)$$

注意到 $K^-\pi^+$ 是 CP 的混合态，卡比博允许的衰变是指数形式的

$$\Gamma(D^0(t) \rightarrow K^-\pi^+) = \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow K^+\pi^-) = e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{K^-\pi^+}|^2 \quad (7.53)$$

因而也可以将很慢的混合过程 $D^0(\bar{D}^0) \rightarrow f_{CP}$ 的衰变时间分布近似为指数函数的形式 $e^{-\hat{\Gamma}t}$ ，按指数的泰勒展开有如下近似关系式：

$$\Gamma(D^0(t) \rightarrow f_{CP}) \propto e^{-\Gamma t} (1 - z\Gamma t + \dots) \approx e^{-\Gamma(1+z)t} \equiv e^{-\hat{\Gamma}t} \quad (7.54)$$

$\hat{\Gamma} = \Gamma(1+z)$ 称为衰变道的有效宽度。 $D^0(\bar{D}^0) \rightarrow f_{CP}$ 与 $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ 道的有效宽度 (寿命) 之比不等于 1 则意味着 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

1. 利用 D^0 的强子衰变道测量 y_{CP}

混合效应的可观测量可表示为^[14, 15]

$$y_{CP} \equiv \frac{\tau(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)}{\hat{\tau}(D^0 \rightarrow f_{CP})} - 1 = \frac{\hat{\Gamma}(D^0 \rightarrow f_{CP})}{\Gamma(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} - 1 \quad (7.55)$$

$\hat{\tau}$ 和 $\hat{\Gamma}$ 分别为衰变的有效寿命和宽度。将 D^0 和 \bar{D}^0 的实验测量结合在一起，则 y_{CP} 又可表示为

$$y_{CP} = \frac{\hat{\Gamma}(D^0 \rightarrow f_{CP}) + \hat{\Gamma}(\bar{D}^0 \rightarrow f_{CP})}{2\Gamma(D^0 \rightarrow K^- \pi^+)} - 1 \quad (7.56)$$

依式 (7.54) 不难导出其有效宽度，从而证明式 (7.56) 可表示为

$$y_{CP} \approx \eta_{CP} \frac{1}{2} \left[\left(\left| \frac{q}{p} \right| + \left| \frac{p}{q} \right| \right) y \cos \phi - \left(\left| \frac{q}{p} \right| - \left| \frac{p}{q} \right| \right) x \sin \phi \right] \quad (7.57)$$

由相应的 D^0 、 \bar{D}^0 有效衰变宽度的测量差可以定义如下的不对称性：

$$\begin{aligned} A_{\Gamma} &\equiv \frac{\hat{\Gamma}(D^0 \rightarrow f_{CP}) - \hat{\Gamma}(\bar{D}^0 \rightarrow f_{CP})}{\hat{\Gamma}(D^0 \rightarrow f_{CP}) + \hat{\Gamma}(\bar{D}^0 \rightarrow f_{CP})} \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\left(\left| \frac{q}{p} \right| - \left| \frac{p}{q} \right| \right) y \cos \phi - \left(\left| \frac{q}{p} \right| + \left| \frac{p}{q} \right| \right) x \sin \phi \right] \frac{\eta_{CP}}{1 + y_{CP}} \\ &\approx \eta_{CP} \frac{1}{2} \left[\left(\left| \frac{q}{p} \right| - \left| \frac{p}{q} \right| \right) y \cos \phi - \left(\left| \frac{q}{p} \right| + \left| \frac{p}{q} \right| \right) x \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (7.58)$$

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

如果不忽略直接的 CP 破坏效应, 可将 $|q/p|$ 和 $|\bar{A}_f/A_f|$ 的参数化取为如下近似形式^[15]

$$\left| \frac{q}{p} \right|^{\pm 2} \approx \sqrt{\frac{1 \pm A_M}{1 \mp A_M}} \approx 1 \pm A_M, \quad \left| \frac{\bar{A}_f}{A_f} \right|^{\pm 2} \approx 1 \pm A_D \quad (7.59)$$

则有

$$|A_f|^{\pm 2} \approx (1 \pm A_M)(1 \pm A_D) \quad (7.60)$$

这里 A_M 代表了混合效应对 CP 破坏的贡献, A_D 来自直接的 CP 破坏, 两者都是小量。至此我们并没有假定弱相角 ϕ 对不同反应道的普适性。当对不同反应道的测量求平均时, 则必须考虑依赖于衰变振幅比的弱相角。对于 $D^0(\bar{D}^0) \rightarrow K^+K^-, \pi^+\pi^-$ 道的实验测量, 弱相角 ϕ 则是普适的。如果将式 (7.48) 和式 (7.49) 利用上面的近似参数化方案展开到 Γt 的两阶次, 则可得到有效寿命的形式

$$\hat{\Gamma}(\bar{D}^0(t) \rightarrow f_{CP}) = \left\{ 1 + \left[1 \pm \frac{1}{2}(A_M + A_D) - \frac{1}{8}(A_M^2 - 2A_M A_D) \right] \right. \\ \left. \cdot \eta_{CP}(y \cos \phi \mp x \sin \phi) \mp A_M(x^2 + y^2) \right. \\ \left. \pm 2A_M y^2 \cos^2 \phi \mp 4xy \cos \phi \sin \phi \right\} \quad (7.61)$$

公式中忽略了所有小于 10^{-5} 的项。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

如果将式 (7.57) 和式 (7.58) 展开近似到 $\sim 10^{-4}$ 的精度, 则可表示为

$$\begin{aligned} y_{CP} &\approx \eta_{CP} \left\{ \left[1 - \frac{1}{8}(A_M^2 - 2A_M A_D) \right] y \cos \phi - \frac{1}{2}(A_M + A_D)x \sin \phi \right\} \\ &\approx \eta_{CP} \left[\left(1 - \frac{1}{8}A_M^2 \right) y \cos \phi - \frac{1}{2}A_M x \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$\begin{aligned} A_\Gamma &\approx \left[\frac{1}{2}(A_M + A_D)y \cos \phi - x \sin \phi \right] \frac{\eta_{CP}}{1 + y_{CP}} \\ &\approx \eta_{CP} \left[\frac{1}{2}(A_M + A_D)y \cos \phi - x \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (7.63)$$

如果没有 CP 破坏, 则 $|q/p| = 1, A_M = \phi = 0$, 因而 $y_{CP} = y$ 。这里讨论的所有衰变道隐含地包括了相应的电荷共轭模式。

在文献 [15] 中作者认为, 较早前见诸文献的近似展开式中略去了式 (7.62) 中的 $\frac{1}{8}A_M^2 y \cos \phi$ 项, 而实际上该项和 $\frac{1}{2}A_M x \sin \phi$ 项具有相同的数量级, 因而以保留为宜。式 (7.63) 显示直接的 CP 破坏 A_D 对 A_Γ 有显著的贡献。若假定 $y = 1\%$, $\cos \phi = 1$, $A_D/2 = 1\%$ 的直接 CP 破坏就可以导致对 A_Γ 的 10^{-4} 贡献。期待 LHCb 和 B 工厂实验能达到 10^{-4} 的实验精度。

Belle 实验首次在 $D^0 \rightarrow K^+K^-, \pi^+\pi^-$ 衰变道 y_{CP} 的测量中, 以 3.2σ 的显著性给出 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合存在的迹象,

$$y_{CP} = [1.31 \pm 0.32(\text{stat}) \pm 0.25(\text{syst})]\% \quad (7.64)$$

同时测量了 A_Γ , 当时并没有看到非零的显著性 [2]。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

2. 利用 $D^0\bar{D}^0$ 的量子关联和半轻子衰变道测 y_{CP}

BESIII 实验利用 $\psi(3770)$ 能区末态 D^0 和 \bar{D}^0 的量子关联, 通过 D^0 的半轻子衰变测量了 y_{CP} ^[19]。 D^0 半轻子衰变的分宽度不依赖于母粒子的 CP 本征值, 只对其所含的部分子味道敏感, 而 D^0 的 CP 本征态 $D_{CP\pm}$ 的衰变总宽度却和其本征值有关。由式 (7.56) 知: $\Gamma_{CP\pm} = \Gamma(1 \pm y_{CP})$, 因此 CP 本征态 $D_{CP\pm}$ 的半轻子衰变分支比和其本征值之间具有关系式:

$$\mathcal{B}(D_{CP\pm} \rightarrow lX) \approx \mathcal{B}(D \rightarrow lX)(1 \mp y_{CP}) \quad (7.65)$$

由此可以导出

$$y_{CP} \approx \frac{1}{4} \left[\frac{\mathcal{B}(D_{CP-} \rightarrow lX)}{\mathcal{B}(D_{CP+} \rightarrow lX)} - \frac{\mathcal{B}(D_{CP+} \rightarrow lX)}{\mathcal{B}(D_{CP-} \rightarrow lX)} \right] \quad (7.66)$$

BESIII 实验中 $D^0\bar{D}^0$ 成对产生。首先用单标记方法确定一个 D^0 介子衰变到 CP 的本征态, 从而标记它的伙伴粒子, 知道了该伙伴 D 介子的 CP 本征值。在所有这些被单标记的事例中有一部分被确定通过半轻子过程衰变, 被称为双标件事例。已知在 D 衰变中的 CP 破坏是很微小的, 可以忽略, 所以由单标记和双标件事例数即可求得 $D_{CP\pm} \rightarrow lX$ 的衰变分支比,

$$\mathcal{B}(D_{CP\mp} \rightarrow lX) = \frac{N_{CP\pm;l}}{N_{CP\pm}} \cdot \frac{\epsilon_{CP\pm}}{\epsilon_{CP\pm;l}} \quad (7.67)$$

其中 $N_{CP\pm}(N_{CP\pm;l})$ 和 $\epsilon_{CP\pm}(\epsilon_{CP\pm;l})$ 分别是单标记衰变 $D \rightarrow CP\pm$ (双标记衰变 $D\bar{D} \rightarrow CP\pm;l$) 的事例产额和探测效率。BESIII 用以双标记的半轻子衰变过程为 $K^\mp e^\pm \nu$ 和 $K^\mp \mu^\pm \nu$, 如表 7.2 所示。利用在 $\sqrt{s} = 3.773\text{GeV}$ 获得的 2.92fb^{-1} 数据 BESIII 测得 $y_{CP} = (-2.0 \pm 1.3 \pm 0.7)\%$ 。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

3. CP 破坏效应的不对称性测量

记 f 为 $CP = +1$ 的带电粒子本征态, $K^+K^-, \pi^+\pi^-$, $D^0(\bar{D}^0)$ 衰变到 f 的含时概率为 Γ , 则 CP 破坏效应的含时不对称性可表示为

$$A_{CP}(f; t) \equiv \frac{\Gamma(D^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f)}{\Gamma(D^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f)} \quad (7.68)$$

$A_{CP}(f; t)$ 中可以包含来自衰变振幅中的直接 CP 破坏, 以及来自 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合或者混合与衰变的干涉效应。若将时间积分的不对称性记为 $A_{CP}(f)$, 其值将会依赖于重建效率的变化, 因为重建效率是衰变时间的函数。引入直接 CP 不对称性的定义,

$$a_{CP}^{\text{dir}} \equiv \frac{|\mathcal{A}_f|^2 - |\bar{\mathcal{A}}_f|^2}{|\mathcal{A}_f|^2 + |\bar{\mathcal{A}}_f|^2} = \frac{1 - \left| \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f} \right|^2}{1 + \left| \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f} \right|^2} = \frac{-A_D}{2 + A_D} \approx -\frac{1}{2}A_D \quad (7.69)$$

推导中利用了式 (7.59)。利用式 (7.10), 取 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合的一阶近似, 可将 CP 不对称性 $A_{CP}(f)$ 表示为

$$A_{CP}(f) \approx a_{CP}^{\text{dir}}(f) - \frac{\langle t(f) \rangle}{\tau(D^0)} A_{\Gamma}(f) \quad (7.70)$$

这里 $\langle t(f) \rangle$ 表示重建的 $D^0 \rightarrow f$ 事例样本的平均衰变时间, 考虑了随时间变化的实验效率; $\tau(D^0)$ 是 D^0 的寿命; $A_{\Gamma}(f)$ 是由式 (7.58) 定义的 $D^0(\bar{D}^0) \rightarrow f$ 有效衰变宽度的不对称性。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

LHCb 实验测量了 $D^0 \rightarrow K^+K^-$ 和 $D^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ 过程中 CP 不对称性的差^[16]。在认定 $A_\Gamma(f)$ 是普适的, 即与衰变末态 f 无关的假设下, 这两个衰变过程之间的 CP 不对称性之差可表示为

$$\Delta A_{CP} \equiv A_{CP}(K^+K^-) - A_{CP}(\pi^+\pi^-) \approx \Delta a_{CP}^{\text{dir}} - \frac{\Delta\langle t \rangle}{\tau(D^0)} A_\Gamma \quad (7.71)$$

其中 $\Delta a_{CP}^{\text{dir}} \equiv a_{CP}^{\text{dir}}(K^+K^-) - a_{CP}^{\text{dir}}(\pi^+\pi^-)$, $\Delta\langle t \rangle$ 是平均衰变时间 $\langle t(K^+K^-) \rangle$ 和 $\langle t(\pi^+\pi^-) \rangle$ 之差。

在 LHCb 实验中, D^0 介子被认为是来自 pp 对撞点产生的 $D^*(2010)^+$ (下面记为 D^{*+}) 的瞬时强衰变 $D^*(2010)^+ \rightarrow D^0\pi^+$, 或者是由 $\bar{B} \rightarrow D^0\mu^-\bar{\nu}_\mu X$ 过程产生的, 这时 D^0 的产生顶点会和对撞点有一定的位移。前一类事例的 D^0 介子可由 π 介子的符号标记, 后一类事例的 D^0 介子则可由 μ 介子的符号标记。 π 标记和 μ 标记 D^0 介子衰变的原初不对称性定义为

$$\begin{cases} A_{\text{raw}}^{\pi\text{-tagged}}(f) \equiv \frac{N(D^{*+} \rightarrow D^0(f)\pi^+) - N(D^{*-} \rightarrow \bar{D}^0(f)\pi^-)}{N(D^{*+} \rightarrow D^0(f)\pi^+) + N(D^{*-} \rightarrow \bar{D}^0(f)\pi^-)} \\ A_{\text{raw}}^{\mu\text{-tagged}}(f) \equiv \frac{N(\bar{B} \rightarrow D^0(f)\mu^-\bar{\nu}_\mu X) - N(B \rightarrow \bar{D}^0(f)\mu^+\nu_\mu X)}{N(\bar{B} \rightarrow D^0(f)\mu^-\bar{\nu}_\mu X) + N(B \rightarrow \bar{D}^0(f)\mu^+\nu_\mu X)} \end{cases} \quad (7.72)$$

这里, N 是相应衰变模式的事例产额。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

这里， N 是相应衰变模式的事例产额。上式可近似为

$$\begin{cases} A_{\text{raw}}^{\pi\text{-tagged}}(f) \approx A_{CP}(f) + A_D(\pi) + A_P(D^*) \\ A_{\text{raw}}^{\mu\text{-tagged}}(f) \approx A_{CP}(f) + A_D(\mu) + A_P(B) \end{cases} \quad (7.73)$$

其中， $A_D(\pi)(A_D(\mu))$ 为 $\pi(\mu)$ 标记中由于正负 $\pi(\mu)$ 粒子重建效率的差异引入的不对称性； $A_P(D^*)$ 和 $A_P(B)$ 是 D^* 介子和 b 强子的产生机制引入的不对称性，主要来自于 c 和 b 夸克的强子化过程。由于对所选择的事例 $A_D(\pi), A_P(D^*)$ 以及 $A_D(\mu), A_P(B)$ 对于相空间求平均后都比较小，它们的修正效应为 $\mathcal{O}(10^{-6})$ ，因而可以认为是和末态 f 无关的，用式 (7.73) 求两者的差时互相抵消，

$$\Delta A_{CP} = A_{\text{raw}}(K^+K^-) - A_{\text{raw}}(\pi^+\pi^-) \quad (7.74)$$

ΔA_{CP} 与可测量的 K^+K^- 和 $\pi^+\pi^-$ 之间的原初不对称性之间的简单关系，使得利用上式测量 ΔA_{CP} 时对系统误差不敏感。

3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

LHCb 实验给出的测量结果为 [16]

$$\begin{cases} \Delta A_{CP}^{\pi\text{-tagged}} = [-18.2 \pm 3.2(\text{stat}) \pm 0.9(\text{syst})] \times 10^{-4} \\ \Delta A_{CP}^{\mu\text{-tagged}} = [-9 \pm 8(\text{stat}) \pm 5(\text{syst})] \times 10^{-4} \end{cases} \quad (7.75)$$

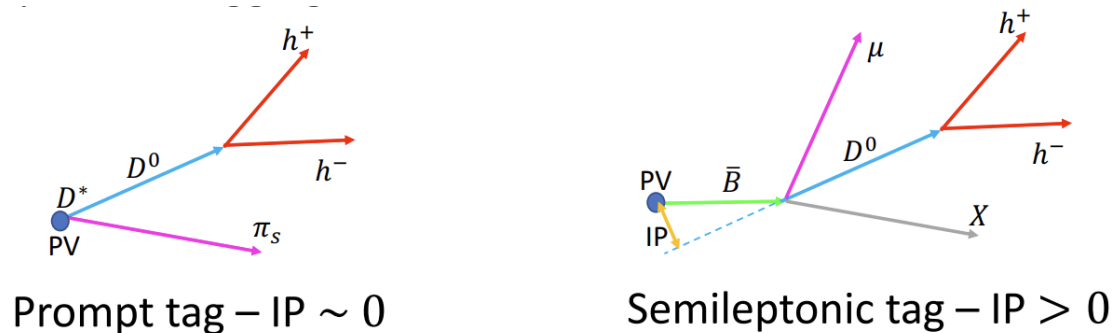
将所有结果，包括其早前的测量结果，合并在一起，给出了 ΔA_{CP} 值：

$$\Delta A_{CP} = (-15.4 \pm 2.9) \times 10^{-4} \quad (7.76)$$

误差是统计误差和系统误差的总和，非零的显著性达到了 5.3σ ，这是首次在粲强子衰变中观测到 CP 破坏。由此结果，采用 LHCb 测得的 $A_F = (-2.8 \pm 2.8) \times 10^{-4}$ 平均值，根据式 (7.71) 不难导出直接 CP 破坏的贡献 $\Delta a_{CP}^{\text{dir}}$ ，

$$\Delta a_{CP}^{\text{dir}} = (-15.7 \pm 2.9) \times 10^{-4} \quad (7.77)$$

正如前面的讨论所期待的， ΔA_{CP} 对直接的 CP 破坏灵敏。



3.4 $D^0(\bar{D}^0)$ 到 CP 本征态的衰变

到目前为止，理论和实验都表明， D^0, \bar{D}^0 系统中的混合和 CP 破坏效应都是由标准模型主导的，LHCb 的测量结果亦然，尽管触及到了 SM 期待值 ($10^{-4} \sim 10^{-3}$) 的高端，挑战了 QCD 第一性原理的预期。该结果也遵从味 $SU(3)$ 对称性的预期。实验尚不能排除存在还未了解的短程机制和可能的 CP 破坏对混合振幅矩阵元 M_{12} 的贡献。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

在 D^0 的共轭三体衰变道 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$, $K_S^0 K^+ K^-$ 中, D^0 和 \bar{D}^0 的衰变振幅可以表示为

$$\begin{cases} \mathcal{M}(m_+^2, m_-^2, t) = f_+(t) \mathcal{A}_{D^0}(m_+^2, m_-^2) + \frac{q}{p} f_-(t) \mathcal{A}_{\bar{D}^0}(m_+^2, m_-^2) \\ \bar{\mathcal{M}}(m_+^2, m_-^2, t) = f_+(t) \mathcal{A}_{\bar{D}^0}(m_+^2, m_-^2) + \frac{p}{q} f_-(t) \mathcal{A}_{D^0}(m_+^2, m_-^2) \end{cases} \quad (7.78)$$

以 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 道为例, $m_+ \equiv m_{K_S^0 \pi^+}$, $m_- \equiv m_{K_S^0 \pi^-}$, 以 m_+^2 和 m_-^2 为两维平面上的坐标轴, 将实验观测到的每一个事例点 (信号和本底事例的全体) 都填充在这个两维平面上, 就组成了事例的达里兹分布图。 \mathcal{A}_{D^0} 和 $\mathcal{A}_{\bar{D}^0}$ 表示达里兹平面上每个事例点 D^0 和 \bar{D}^0 的衰变振幅。假定 \mathcal{CP} 守恒, 则 $q/p = 1$,

$$\mathcal{A}_{\bar{D}^0}(m_+^2, m_-^2) = \mathcal{A}_{D^0}(m_-^2, m_+^2) \quad (7.79)$$

取 \mathcal{M} 和 $\bar{\mathcal{M}}$ 的平方乘以归一化因子 Γ , 就可以给出 D^0 和 \bar{D}^0 含时衰变率的概率密度分布函数,

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{D^0}(m_+^2, m_-^2, t) = \Gamma |\mathcal{M}(m_+^2, m_-^2, t)|^2 \\ \mathcal{P}_{\bar{D}^0}(m_+^2, m_-^2, t) = \Gamma |\bar{\mathcal{M}}(m_+^2, m_-^2, t)|^2 \end{cases} \quad (7.80)$$

衰变率中的函数 $\sinh(y\Gamma t)$ 、 $\cosh(y\Gamma t)$ 、 $\sin(x\Gamma t)$ 和 $\cos(x\Gamma t)$ 给出中性 D 介子的振荡和混合, 因此通过对 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 道含时衰变率的达里兹拟合就可以直接测量出混合参数 x 和 y 。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

D^0 衰变固有时 t 的测量精度对拟合结果有至关重要的影响，它由中性 D 介子在质心系中的衰变长度，即产生顶点和衰变顶点之间的距离 l 和动量 p 给出，

$$t = \frac{m_{D^0} l}{cp} \quad (7.81)$$

t 的误差 σ_t 由产生顶点、衰变顶点和误差矩阵给出

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial i} \right)^T V_i \left(\frac{\partial t}{\partial i} \right) \quad (7.82)$$

其中误差矩阵

$$V_i = \begin{pmatrix} V_{\text{det}} & \text{cov}(\text{det}, IP) & \text{cov}(\text{det}, p) \\ \text{cov}(IP, \text{det}) & V_{IP} & \text{cov}(IP, p) \\ \text{cov}(p, \text{det}) & \text{cov}(p, IP) & V_p \end{pmatrix} \quad (7.83)$$

其中， V_{det} 、 V_{IP} 和 V_p 分别为衰变顶点、产生顶点和动量的误差； $\text{cov}(X, Y)$ 是参量 X 和 Y 的协方差矩阵元，由在对撞顶点 (IP) 约束下对 D^0 产生顶点的拟合获得。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

Belle 实验中 $D^0(\bar{D}^0)$ 来自于 $e^+e^- \rightarrow D^{*\pm}D^{*\mp}$, $D^{*\pm} \rightarrow \bar{D}^0\pi^\pm$ 的级联衰变过程。可将低动量的软 π^\pm 记为 π_s^\pm , 它可用来标记衰变产生的是 D^0 或 \bar{D}^0 。可观测的物理量选为 $K_S^0\pi^+\pi^-$ 的不变质量 $M \equiv M_{K_S^0\pi^+\pi^-}$ 和 $D^{*\pm}$ 衰变过程释放出的动能 $Q \equiv (M_{K_S^0\pi^+\pi^-} - M_{K_S^0\pi^+\pi^-} - m_{\pi_s}) \cdot c^2$ 。Belle 实验通过对 (M, Q) 平面上信号事例和各类本底事例的筛选拟合, 确定各类事例以 (M, Q) 为变量的分布和组分, 在此基础上建立起达里兹拟合的程序^[24]。例如, 研究表明信号事例的 (M, Q) 分布可用下式拟合:

$$F_{\text{sig}} = N[(1 - f_s)G_3(M, \mu, \sigma, f_2, f_3, \Delta, \sigma_2/\sigma, \sigma_3/\sigma) + f_s \cdot CB] \\ \times [(1 - f_g)S_b(Q, \mu_Q, \sigma_Q, \Delta_{\sigma_Q}, N_H, N_L) + f_g \cdot G(Q, \Delta_Q, \sigma_g/\sigma_Q)] \quad (7.84)$$

其中, S_b 是学生式 t 函数; G 和 G_3 分别为单高斯和三高斯函数; $\sigma_Q = \sigma_Q^0(1 + c_1|M - \mu| + c_2|M - \mu|^2)$; f_s 代表晶球函数 CB 描写的末态辐射事例占总的 M 信号分布的比例, 为 0.4%。本底事例主要有随机的 π_s 本底 F_{rnd} 和组合本底 F_{cmb} 。随机的 π_s 本底是由于筛选到的 π_s 并非来自于 $D^{*\pm}$ 的衰变, 而 D^0 是正确重建的, 其 M 分布和信号相同, 所以有

$$F_{\text{rnd}}(M, Q) = N \cdot F_{\text{sig}}(M) \times (Q^{1/2} + \alpha Q^{3/2}) \quad (7.85)$$

别的本底事例都归于组合本底, 可采用如下的函数拟合:

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

别的本底事例都归于组合本底，可采用如下的函数拟合：

$$F_{\text{cmb}}(M, Q) = N[(1 - f_{d4b}) \cdot (1 + \beta_1 M) \times (Q^{1/2} + \beta_2 Q^{3/2} + \beta_3 Q^{5/2}) + f_{d4b} \cdot F_{d4b}(M, Q)] \quad (7.86)$$

其中

$$F_{d4b}(M, Q) = N[(1 - f_{gm}) \cdot (aM^2 + bM + 1) + f_{gm} \cdot G(M, \mu_M, \sigma_M)] \times [(1 - f_g) \cdot S_b(Q, \mu_Q, \sigma_Q, \Delta\sigma_Q, N_H, N_L) + f_g \cdot G(Q, \Delta_Q, \sigma_g/\sigma_Q)] \quad (7.87)$$

拟合结果如图 7.4所示，与数据实验点符合得很好。

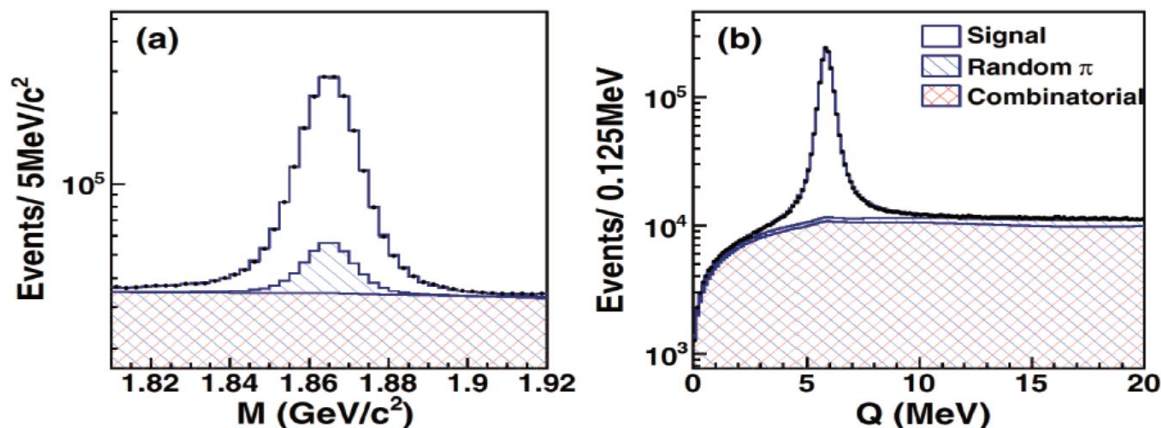


图 7.4: (M, Q) 平面在 $1.81\text{GeV}/c^2 < M < 1.92\text{GeV}/c^2$ 和 $0 < Q < 20\text{MeV}$ 信号区间拟合结果给出的 (a) M 和 (b) Q 投影。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

下面给出达里兹拟合的简单描述。这一衰变过程的末态是三体，两体中间态之间可能形成准共振态，因此必须选择适当的模型来描写它们，使得达里兹拟合能精确地反映和描述实验数据。一般将 D 的衰变振幅表示成一系列两体衰变 (r)

振幅之和加非共振态项 (NR) 的贡献，

$$\mathcal{A}_{D^0}(m_+^2, m_-^2) = \sum_r a_r e^{i\phi_r} \mathcal{A}_r(m_+^2, m_-^2) + a_{NR} e^{i\phi_{NR}} \quad (7.88)$$

这里 a_r (a_{NR}) 和 ϕ_r (ϕ_{NR}) 分别为组分 r (NR) 的振幅大小和相位。 $\mathcal{A}_r = F_D \times F_r \times T_r \times W_r$ 是洛伦兹不变的表达式，描写 D^0 介子通过中间共振态衰变到三体末态的动力学特征，是达里兹平面上位置的函数。其中 F_D (F_r) 是 D (共振态 r) 衰变顶点的 Blatt-Weisskopf 离心势垒因子^[20]，半径为 $R = 1.5 \text{ GeV}^{-1} \hbar c \equiv 0.3 \text{ fm}$ ； T_r 是共振态的传播子，一般选用宽度依赖于质量的相对论布赖特-维格纳 (Breit-Wigner, BW) 参数化公式； W_r 描写衰变中的角分布。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

Belle 的分析发现 $\pi\pi$ 和 $K\pi$ 的 S 波动力学机制比较复杂，有若干相互叠加的宽共振态，最后选用 K 矩阵模型 [21, 22] 来描写 $\pi\pi$ 的 S 波，用 LASS 模型 [23] 来描写 $K\pi$ 的 S 波，所有的 P、D 波都用 BW 模型描写，即将 (7.88) 式修改为，

$$\mathcal{A}_{D^0}(m_+^2, m_-^2) = \sum_{r \neq S\text{波}} a_r e^{i\phi_r} \mathcal{A}_r(m_+^2, m_-^2) + a_{NR} e^{i\phi_{NR}} + F_{\pi\pi S\text{波}} + L_{K\pi S\text{波}}, \quad (7.89)$$

K 矩阵的公式形式为，

$$F_\mu(s) = [I - iK(s)\rho(s)]_{\mu\nu}^{-1} P_\nu(s), \quad (7.90)$$

其中 s 是 $\pi\pi$ 不变质量的平方，指标 μ (ν) 表示第 μ 个道 ($1 = \pi\pi$ 、 $2 = K\bar{K}$ 、 $3 = \pi\pi\pi\pi$ 、 $4 = \eta\eta$ 、 $5 = \eta\eta'$)。 I 是单位矩阵， K 是描写 S 波散射过程的矩阵， ρ 是相空间矩阵， P 是初始产生矢量 (P 矢量)。在此框架中产生过程可以看作初始存在的若干态由 $[I - iK(s)\rho(s)]_{\mu\nu}^{-1}$ 传播到末态。若末态的两体系统是孤立的，和产生过程中别的末态粒子没有相互作用，则传播子可由散射实验数据描写。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

P 矢量也应由数据本身决定，因为其依赖于产生机制。 $K_{\mu\nu}$ 和 P_ν 的参数化形式为，

$$K_{\mu\nu}(s) = \left(\sum_{\alpha} \frac{g_{\mu}^{\alpha} g_{\nu}^{\alpha}}{m_{\alpha}^2 - s} + f_{\mu\nu}^{scatt} \frac{1.0 - s_0^{scatt}}{s - s_0^{scatt}} \right) \cdot f_{A0}(s) \quad (7.91)$$

公式中的参数见表 (7.3)，由对 $\pi\pi$ 散射实验从阈值到 $1900 \text{ MeV}/c^2$ 的数据进行全局拟合得到。其中 g_{μ}^{α} 是 K 矩阵的极点 m_{α} 和 μ 道的耦合常数。 $f_{\mu\nu}^{scatt}$ 和 s_0^{scatt} 描写 K 矩阵的缓慢变化部分。因子，

$$f_{A0}(s) = \frac{1 - s_{A0}}{s - s_{A0}} (s - s_A m_{\pi}^2/2), \quad (7.92)$$

用以压制物理区域靠近 $\pi\pi$ 阈值处的 $s = 0$ 运动学奇点。因为我们这里需要描写的是 $\pi\pi$ 道，所以只有 F_1 出现在 (7.89) 中，即，

$$F_{\pi\pi S\text{波}} = F_1 \quad (7.93)$$

所有 $\mu \neq 1$ 的参数 $f_{\mu\nu}^{scatt}$ 都取为零，因此 P 矢量简单的取为，

$$P_{\nu}(s) = \sum_{\alpha} \frac{\beta_{\alpha} g_{\nu}^{\alpha}}{m_{\alpha}^2 - s} + f_{1\nu}^{prod} \frac{1 - s_0^{prod}}{s - s_0^{prod}} \quad (7.94)$$

注意到 P 矢量和 K 矩阵具有相同的极点，否则 F_1 矢量在 K 矩阵 (P 矢量) 极点处将会消亡 (发散)。初始 P 矢量的参数 β_{α} 、 $f_{1\nu}^{prod}$ 和 s_0^{prod} 由拟合标记的 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 数据样本得到。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

描述 $K\pi$ 系统参数化的 LASS 模型基于 SLAC 的 LASS 实验在 $K^-p \rightarrow K^- \pi^+ n$ 散射过程的研究中得出的参数化形式。他们在 $K\pi$ 谱中发现了一个宽的无自旋共振态，中心在 $1430\text{MeV}/c^2$ 附近，形状不能用 BW 参数化。他们使用共振态加有效范围内的非共振态成分的参数化方法来描写该共振态 [23]

$$T = \sin \delta_F e^{i\delta_F} + \sin \delta_R e^{i\delta_R} e^{2i\delta_F} \quad (7.95)$$

其中

$$\tan \delta_R = \frac{M\Gamma(m_{K\pi}^2)}{M^2 - m_{K\pi}^2}, \quad \cot \delta_F = \frac{1}{aq} + \frac{rq}{2} \quad (7.96)$$

在此表达式中引入相对相位和振幅，即可将其推广到产生过程中 [21]

$$T = F \sin(\delta_F + \phi_F) e^{i(\delta_F + \phi_F)} + R \sin(\delta_R + \phi_R) e^{i(\delta_R + \phi_R)} e^{2i(\delta_F + \phi_F)} \quad (7.97)$$

参数 a 和 r 代表散射长度和有效作用长度， $F(\phi_F)$ 和 $R(\phi_R)$ 是非共振态和共振态项的振幅 (相角)， q 是旁观粒子在 $K\pi$ 静止系中的动量。 δ_F 和 δ_R 依赖于 $m_{K\pi}^2$ 。 M 和 $\Gamma(m_{K\pi}^2)$ 是共振项的质量和跑动宽度。所有参数 (M 、 Γ 、 F 、 ϕ_F 、 R 、 ϕ_R 、 a 和 r) 的值都由对标记 D^0 样本的拟合得到，别的参数来自于模型的设定。洛伦兹不变的振幅形式可写为

$$T_R \equiv \hat{T} = \frac{T}{\rho(s)} = \frac{T\sqrt{s}}{2q(s)} \quad (7.98)$$

Belle 的达里兹分析中采用了如下形式：

$$L_{K\pi S\text{波}} = \sum_i A_i e^{i\phi_i} \cdot T_R \quad (7.99)$$

这里 A_i 和 ϕ_i 表示 $K_0^*(1430)^+$ 和 $K_0^*(1430)^-$ 的振幅和相位。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

达利兹拟合采用如下的最大似然函数法，

$$\begin{aligned} 2 \ln \mathcal{L} = & 2 \sum_{i=1}^n \ln [f_{sig}^i \cdot p_{sig}(m_{+,i}^2, m_{-,i}^2, t) + f_{rnd}^i \cdot p_{rnd}(m_{+,i}^2, m_{-,i}^2, t) \\ & + f_{cmd}^i \cdot p_{cmd}(m_{+,i}^2, m_{-,i}^2, t), \end{aligned} \quad (7.100)$$

其中信号的分布函数 p_{sig} 由下面的归一化形式给出，

$$p_{sig}(m_{+,i}^2, m_{-,i}^2, t) = \frac{|\mathcal{M}(m_{+,i}^2, m_{-,i}^2, t)|^2 \cdot \epsilon(m_{+,i}^2, m_{-,i}^2)}{\int_D dm_+^2 dm_-^2 |\mathcal{M}(m_+^2, m_-^2, t)|^2 \cdot \epsilon(m_+^2, m_-^2)}, \quad (7.101)$$

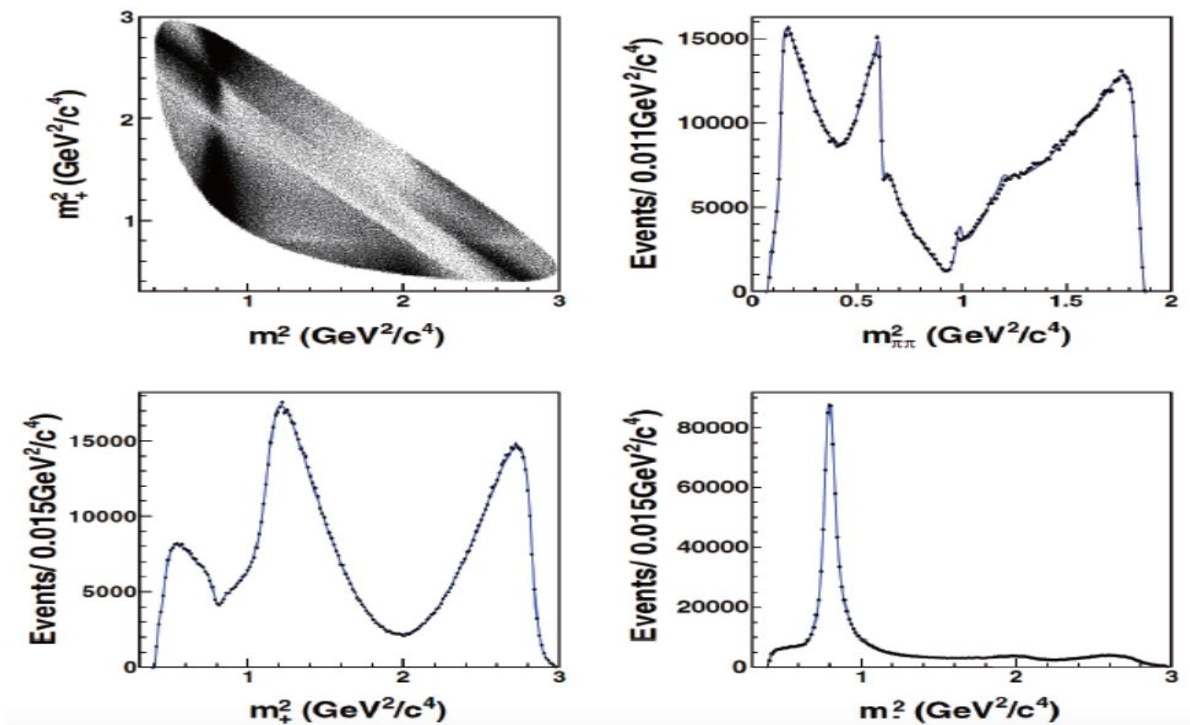
ϵ 是达利兹效率函数。本底分布函数的研究不再赘述，有兴趣的可参见 [24]。

3.5 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

图 7.5 显示的是达利兹变量的拟合投影，和数据点很好的相符。Belle 利用 $921fb^{-1}$ 的 e^+e^- 对撞数据给出模型依赖的测量结果为 [24]，

$$x = (0.56 \pm 0.19^{+0.03+0.06}_{-0.09-0.09})\%, \quad y = (0.30 \pm 0.15^{+0.04+0.03}_{-0.05-0.06})\%. \quad (7.102)$$

该分析得到的 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合的显著性相对于无混合点为 2.5σ 。



3.6 D^0 共轭三体衰变道混合参数的模型无关测量

下面介绍一下 LHCb 和 CLEO 实验对 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ 道进行的和模型无关的测量 [25, 26]。若对 (7.80) 式做泰勒展开并忽略掉高阶的 x^2, y^2, xy 项, 则有,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{D^0}(m_+^2, m_-^2, t) &= \Gamma e^{-\Gamma t} \left[|\mathcal{A}_{D^0}|^2 - \Gamma t \Re \left(\frac{q}{p} \mathcal{A}_{D^0}^* \mathcal{A}_{\bar{D}^0}(y + ix) \right) \right], \\ \mathcal{P}_{\bar{D}^0}(m_+^2, m_-^2, t) &= \Gamma e^{-\Gamma t} \left[|\mathcal{A}_{\bar{D}^0}|^2 - \Gamma t \Re \left(\frac{p}{q} \mathcal{A}_{D^0} \mathcal{A}_{D^0}^*(y + ix) \right) \right],\end{aligned}$$

对 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合的测量可以忽略 CP 破坏, 取 $q/p = 1$, 因此上式可简化为,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{D^0}(m_+^2, m_-^2, t) &= \Gamma e^{-\Gamma t} [|\mathcal{A}_{D^0}|^2 - \Gamma t \Re(\mathcal{A}_{D^0}^* \mathcal{A}_{D^0}(y + ix))], \\ \mathcal{P}_{\bar{D}^0}(m_+^2, m_-^2, t) &= \Gamma e^{-\Gamma t} [|\mathcal{A}_{D^0}|^2 - \Gamma t \Re(\mathcal{A}_{D^0} \mathcal{A}_{D^0}^*(y + ix))],\end{aligned}$$

3.6 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

在达利兹平面相空间中可以在不同的区域对密度分布函数进行积分，分区依据不同的物理考虑而有多种方案。CLEO 在先前的分析 [26] 中采用的分区使得在相空间的每个区中强相角的变化最小。其优点在于减小探测因素的影响，例如不同区间的探测效率的变化。他们按此将整个达利兹平面相空间分成了 16 个区间，从 1 到 8 相空间中 $m_+^2 > m_-^2$ ，从 -1 到 -8 的区间中 $m_+^2 < m_-^2$ 。分区关于主对角线是对称的，即分区 i 和它的镜像 $-i$ 之间的变换关系为 $(m_+^2, m_-^2) \rightarrow (m_-^2, m_+^2)$ 。可以定义如下 i 分区的积分变量，

$$T_i \equiv \int_i |\mathcal{A}_{D^0}|^2 dm_+^2 dm_-^2,$$
$$X_i \equiv \frac{1}{\sqrt{T_i T_{-i}}} \int_i \mathcal{A}_{D^0}^* \mathcal{A}_{\bar{D}^0} dm_+^2 dm_-^2,$$

将 X_i 的实部和虚部记为，

$$c_i \equiv \Re(X_i), \quad s_i \equiv -\Im(X_i),$$

对于上述给定的对称性分区，(7.79)式意味着 $X_{-i} = X_i^*$ ，因而 $c_{-i} = c_i, s_{-i} = -s_i$ 。

3.6 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

利用上述这些定义，积分的几率密度函数为，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{D^0}(i, t) &= \int_i \mathcal{P}_{D^0}(m_+^2, m_-^2) dm_+^2 dm_-^2 = \Gamma e^{-\Gamma t} \left[T_i - \Gamma t \sqrt{T_i T_{-i}} (y c_i + x s_i) \right], \\ \mathcal{P}_{\bar{D}^0}(i, t) &= \Gamma e^{-\Gamma t} \left[T_{-i} - \Gamma t \sqrt{T_i T_{-i}} (y c_i - x s_i) \right].\end{aligned}\quad (7.107)$$

CLEO 实验通过测量每个分区中的 T_i 、 c_i 和 s_i 得到混合参数 x 和 y ，详见 [26]。

3.6 D^0 的共轭三体衰变道混合参数的测量

LHCb 实验定义 $\Delta m = m_{D^*} - m_D$, m_{D^*} 和 m_D 由其衰变末态重建。 x 和 y 是由对变量 $(m_D, \Delta m)$ 和 $(t_D, \ln \chi_{IP}^2)$ 的一系列拟合得到的, t_D 是 D 的衰变寿命, 碰撞参数 χ_{IP}^2 是有无 D^0 候选者的衰变顶点拟合 χ^2 之差, 要求衰变顶点和相应的 pp 对撞顶点间有一定的移动。拟合首先在整个达利兹相空间, 而后在各个子区间进行, 详见 [25]。LHCb 利用质心系 7GeV 能区 1.0fb^{-1} 的 pp 对撞数据给出,

$$x = (-0.86 \pm 0.53 \pm 0.17) \times 10^{-2}, \quad y = (+0.03 \pm 0.46 \pm 0.13) \times 10^{-2}. \quad (7.108)$$

误差为统计误差, 实验系统误差和来自于振幅模型的系统误差。

3.7 利用其他衰变道测量 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合

BABAR 实验首次测量了 $D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 的 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合 [28], 使用的也是依赖于时间的振幅分析方法。结果为 $x = (1.5 \pm 1.2 \pm 0.6)\%$ 和 $y = (0.2 \pm 0.9 \pm 0.5)\%$ 。分析受制于数据量小, 统计误差较大, 在增加数据量后结果会有所改善。

Belle 实验通过测量 $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^- \pi^0$ 道时间 T 破坏的动量矩, 在 CPT 守恒下检验 CP 的破坏 [29]。实验构造末态任意三动量的标量积, 一般选带电粒子 K_S^0, π^+, π^- 的动量,

$$C_T = \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3),$$

同样构造 \bar{D}^0 的 CP 共轭变量 \bar{C}_T 。用 C_T 和 \bar{C}_T 构造如下的不对称性,

$$A_T = \frac{\Gamma(C_T > 0) - \Gamma(C_T < 0)}{\Gamma(C_T > 0) + \Gamma(C_T < 0)},$$
$$\bar{A}_T = \frac{\Gamma(-\bar{C}_T > 0) - \Gamma(-\bar{C}_T < 0)}{\Gamma(-\bar{C}_T > 0) + \Gamma(-\bar{C}_T < 0)},$$

Γ 是相应的分支衰变率。由于末态的相互作用 (FSI) 效应, 这两个不对称性有可能非零, 因此定义可观测量,

$$a_{CP}^{T-odd} = \frac{1}{2}(A_T - \bar{A}_T),$$

以消除此影响。 a_{CP}^{T-odd} 非零则意味着时间 T 的破坏。Belle 的测量结果为

$$a_{CP}^{T-odd} = [-0.28 \pm 1.38(stat.)_{-0.76}^{+0.23}(syst.)] \times 10^{-3}.$$

没有观察到 CP 的破坏。

3.7 利用其他衰变道测量 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合

作为一个总结，我们这里给出重味平均组 (HFLAV) [32] 对所有有效的测量结果进行的整体拟合，得到了下列参数的平均值： x 、 y 、 $\delta_{K\pi}$ 、 $\delta_{K\pi\pi^0}$ 、 R_D 、 $A_D = (R_D^+ - R_D^-)/(R_D^+ + R_D^-)$ 、 $|q/p|$ 和 $Arg(q/p) \equiv \phi$ ，以及时间积分的 A_K 和 A_π 。拟合考虑了实验可观测量之间来自误差矩阵的相关性。图 7.6 展示了混合参数 (x, y) 的整体拟合结果。图 7.7 是 $(|q/p|, Arg(q/p))$ 的整体拟合结果。表 7.4 给出了 HFLAV 的整体拟合参数值。

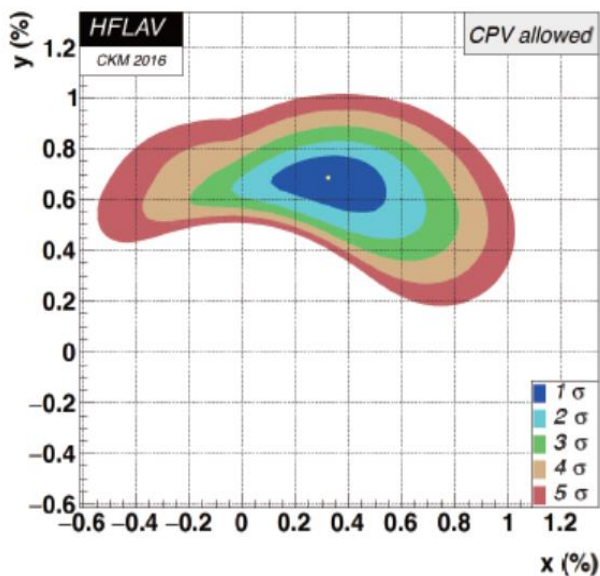


图 7.6: HFLAV 给出的混合参数 (x, y) 的二维 $1\sigma - 5\sigma$ 等值轮廓线，来自于下列反应道的测量： $D^0 \rightarrow K^{(*)+}l\nu, h^+h^-, K^+\pi^-, K^+\pi^-\pi^0, K^+\pi^-\pi^+\pi^-, K_S^0\pi^+\pi^-, K_S^0K^+K^-, \pi^+\pi^-\pi^0$ 和 $\psi(3770)$ 共振态的双标记分支比测量。

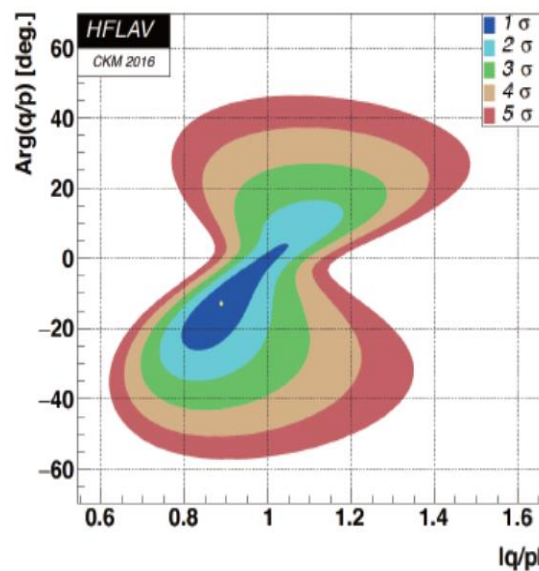


图 7.7: HFLAV 给出的 $(|q/p|, Arg(q/p))$ 的二维 $1\sigma - 5\sigma$ 等值轮廓线，来自于下列反应道的测量： $D^0 \rightarrow K^{(*)+}l\nu, h^+h^-, K^+\pi^-, K^+\pi^-\pi^0, K^+\pi^-\pi^+\pi^-, K_S^0\pi^+\pi^-, K_S^0K^+K^-, \pi^+\pi^-\pi^0$ 和 $\psi(3770)$ 共振态的双标记分支比测量。

3.7 利用其他衰变道测量 $D^0 - \bar{D}^0$ 混合

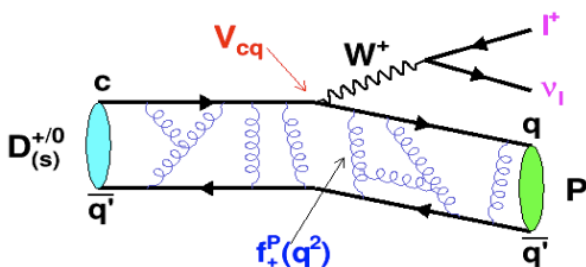
表 7.4: HFLAV 整体拟合给出的参数值。

| 参数 | 无 CP 破坏 | 允许 CP 破坏 | 允许 CP 破坏的 95% 置信区间 |
|-----------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------|
| $x(\%)$ | $0.46^{+0.14}_{-0.15}$ | 0.32 ± 0.14 | [0.04, 0.62] |
| $y(\%)$ | 0.62 ± 0.08 | $0.69^{+0.06}_{-0.07}$ | [0.50, 0.80] |
| R_D | $0.348^{+0.004}_{-0.003}$ | $0.349^{+0.004}_{-0.003}$ | [0.342, 0.356] |
| $\delta_{K\pi}(\circ)$ | $8.0^{+9.7}_{-11.2}$ | $15.2^{+7.6}_{-10.0}$ | [-16.8, 30.1] |
| $\delta_{K\pi\pi^0}(\circ)$ | $20.4^{+23.3}_{-23.8}$ | $31.7^{+23.5}_{-24.2}$ | [-16.4, 77.7] |
| $A_D(\%)$ | --- | -0.88 ± 0.99 | [-2.8, 1.0] |
| $ q/p $ | --- | $0.89^{+0.08}_{-0.07}$ | [0.77, 1.12] |
| $\phi(\circ)$ | --- | $-12.9^{+9.9}_{-8.7}$ | [-30.2, 10.6] |
| A_K | --- | -0.11 ± 0.13 | [-0.37, 0.14] |
| A_π | --- | 0.11 ± 0.14 | [-0.25, 0.28] |

3.8 半轻子衰变

粲介子半轻衰变 → 形状因子

粲介子半轻衰变是精密检验标准模型的一个理想窗口



$$\frac{d\Gamma}{dq^2} = X \frac{G_F^2}{24\pi^3} |f_+^h(0)|^2 |V_{cq}|^2 |\vec{p}_h|^3$$

夸克间强作用: 形状因子 $f_+^h(0)$
 夸克间弱作用: CKM矩阵元 $|V_{cq}|$

理论上, 格点量子色动力学 (QCD)、QCD求和规则和夸克模型等方法能够计算 $f_+^h(0)$

实验上, 联合标准模型全局拟合给出的 $|V_{cq}|$ (误差可忽略), 能够精密测量 $f_+^h(0)$

精密测量 $f_+^h(0)$, 精确检验格点QCD理论等计算, 是寻找粲衰变中新物理迹象的一个重要途径

3.8 半轻子衰变

粲介子半轻衰变 $\rightarrow |V_{cs}|$ 和 $|V_{cd}|$

CKM矩阵元是标准模型的基本参数，描述弱相互作用引起的夸克场的混合。在标准模型框架内，CKM矩阵应满足么正性

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

精密测量CKM矩阵元，进而检验CKM矩阵的么正性，是验证电弱理论和寻找超出标准模型新物理的重要途径之一

目前：粲介子纯轻和半轻衰变是测量 $|V_{cs}|$ 和 $|V_{cd}|$ 的两种基本途径，结果相互验证，测量由BESIII主导

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0.9985 \pm 0.0006 \quad \text{精度} 0.06\%$$

$$|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1.025 \pm 0.022 \quad \text{精度} 2.2\%$$

大幅改进 $|V_{cs}|$ 和 $|V_{cd}|$ 测量精度，对精确检验CKM矩阵么正性有至关重要的作用

3.8 半轻子衰变

粲介子半轻衰变 → 检验轻子普适性

轻子味道普适性是标准模型的一个基本假定

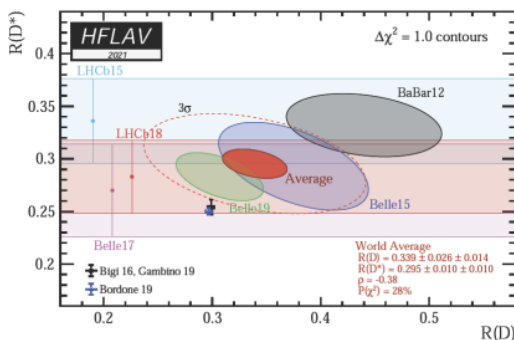
精确检验轻子味道普适性是探索新物理的重要途径之一

重味B介子物理:

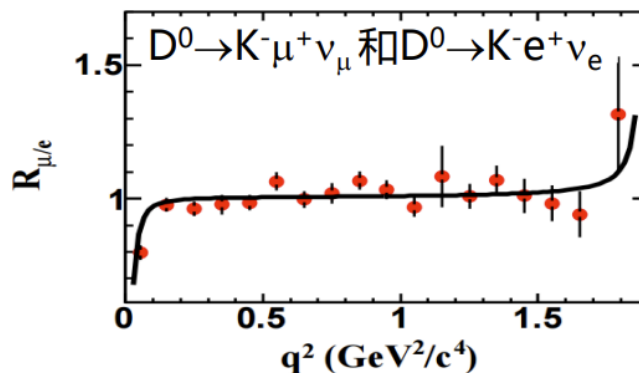
$$R(D^{(*)}) = \frac{B(B \rightarrow D^{(*)} \tau \nu)}{B(B \rightarrow D^{(*)} l \nu)}$$

$$R_{\mu/e} = \frac{\Gamma(D \rightarrow h \mu^+ \nu_\mu)}{\Gamma(D \rightarrow h e^+ \nu_e)} \quad \begin{array}{l} \text{理论误差} \\ < 0.2\% \end{array}$$

偏离标准模型预期 3.4σ



究竟是真实的物理效应?



需综合研究各类重介子、尤其是处于微扰和非微扰QCD过渡能区的含粲强子的各类含轻衰变

系统、精密地测量不同代半轻衰变分支比之比 $R_{\mu/e}$, 有助于澄清粲夸克衰变中是否存在轻子普适性破坏迹象

3.9 纯轻子衰变

CKM矩阵

CKM矩阵是标准模型的基本参数，
描述着夸克味道之间的混合

CKM矩阵么正性是检验电弱统一理论的重要途径

$$V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0.9985 \pm 0.0006$$

第一行的世界平均精度为 10^{-4}

$$|V_{cd}| = 0.221 \pm 0.004$$

$$|V_{cs}| = 0.987 \pm 0.011$$

$$|V_{cb}| = 0.0410 \pm 0.0014$$

$$|V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 = 1.025 \pm 0.022$$

第二行的世界平均精度只有 10^{-2}

提高第二行矩阵元的实验精度是
当前检验CKM矩阵么正性的关键

么正性要求之一

任意一行的平方和等于一

如果么正性不满足

新物理？

3.9 纯轻子衰变

粲介子纯轻衰变是测量 $|V_{cd}|$ 和 $|V_{cs}|$ 最理想的场所

在纯轻衰变中获取的 $|V_{cd}|$ 和 $|V_{cs}|$ 的误差主要来自实验精度

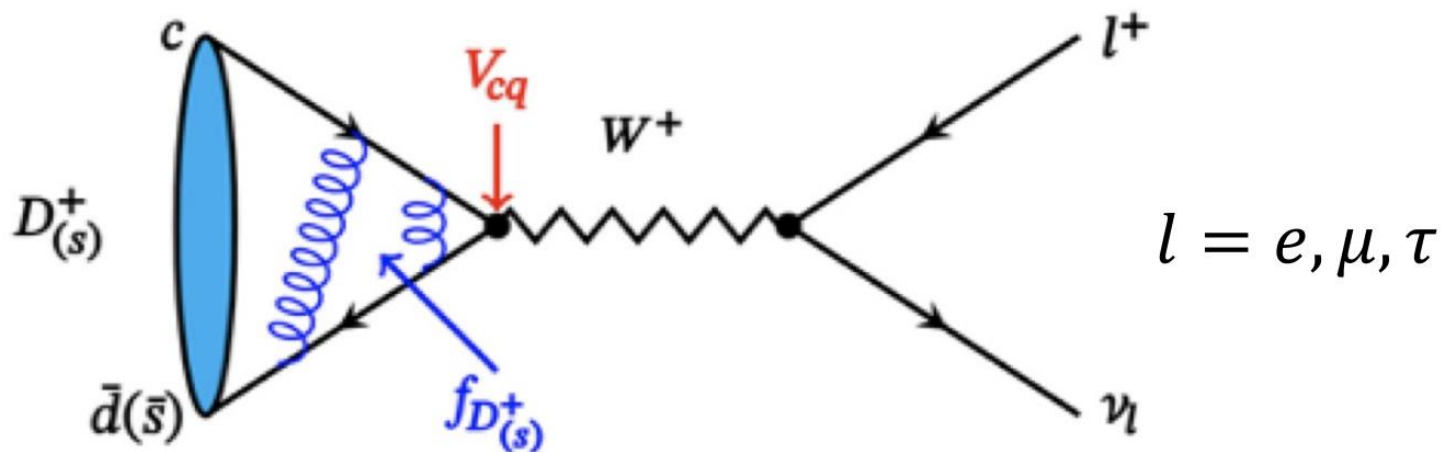
12.2.4 $|V_{cs}|$

The direct determination of $|V_{cs}|$ is possible from semileptonic D or leptonic D_s decays, using lattice QCD calculations of the semileptonic D form factor or the D_s decay constant. For muonic decays, the average of Belle [41], CLEO-c [42], BABAR [43], and BESIII [44, 45] is $\mathcal{B}(D_s^+ \rightarrow \mu^+ \nu) = (5.51 \pm 0.16) \times 10^{-3}$ [24]. For decays to τ leptons, the average of CLEO-c [42, 46, 47], BABAR [43], Belle [41], and BESIII [44] gives $\mathcal{B}(D_s^+ \rightarrow \tau^+ \nu) = (5.52 \pm 0.24) \times 10^{-2}$ [24]. From each of these values, determinations of $|V_{cs}|$ can be obtained using the PDG values for the mass and lifetime of the D_s , the masses of the leptons, and $f_{D_s} = (249.9 \pm 0.5) \text{ MeV}$ [14]. The average of these determinations gives $|V_{cs}| = 0.992 \pm 0.012$, where the error is dominated by the experimental uncertainty. In semileptonic D decays, lattice QCD calculations of the form factor are available [14]. Using $f_+^{DK}(0) = (0.27 \pm 0.02) \text{ GeV}$ [29], BABAR [48], and recent BESIII [26, 49] measurements of $D \rightarrow K l \nu$ decays, one obtains $|V_{cs}| = 0.939 \pm 0.038$, where the dominant uncertainty is from the theoretical calculation of the form factor. Averaging the determinations from leptonic and semileptonic decays, we find

$$|V_{cs}| = 0.987 \pm 0.011. \quad (12.10)$$

在半轻衰变中获取的 $|V_{cd}|$ 和 $|V_{cs}|$ 的误差主要受到理论上形状因子的计算（不小于2%）

3.9 纯轻子衰变



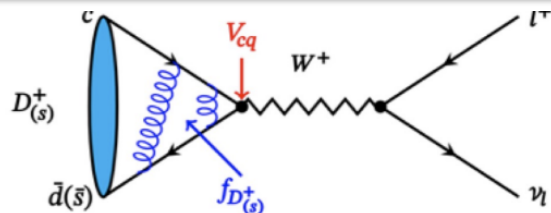
$$\Gamma(D_{(s)}^+ \rightarrow l^+ \nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{cd(s)}|^2 f_{D(s)}^2 m_{D(s)} m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_{D(s)}^2}\right)^2$$

- **弱相互作用**：正反夸克对通过 W^+ 玻色子的湮灭 $\rightarrow |V_{cd(s)}|$
- **强相互作用**：粲夸克与轻夸克之间的胶子交换 $\rightarrow f_{D(s)}$
- CKM矩阵元 $|V_{cd(s)}|$ 只能从实验测定，衰变常数 $f_{D(s)}$ 可经由格点QCD计算或实验测量

3.9 纯轻子衰变

实验测得

$\downarrow l = e, \mu, \tau$



$$\Gamma(D_{(s)}^+ \rightarrow l^+ \nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_{D_{(s)}^+}^2 |V_{cd(s)}|^2 m_l^2 m_{D_{(s)}^+} \left(1 - \frac{m_l^2}{m_{D_{(s)}^+}^2}\right)^2$$

结合格点QCD的 $f_{D_{(s)}}$

→ 精确测量CKM矩阵元 $|V_{cd(s)}|$

结合CKM全局拟合的 $|V_{cd(s)}|$

→ 精确刻度格点QCD计算 $f_{D_{(s)}}$ 、
可外推到B能区

不同轻子末态分宽度的比值

$$e^+ \nu_e : \mu^+ \nu_\mu : \tau^+ \nu_\tau$$

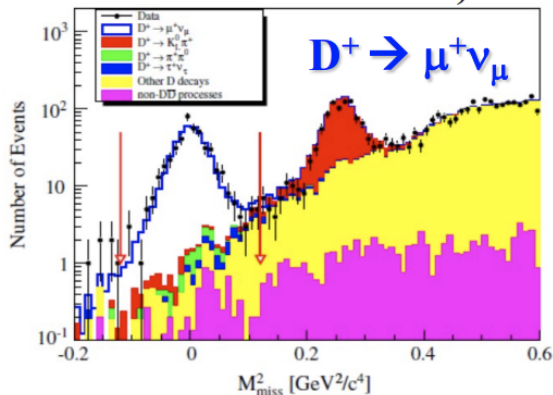
$$D^+ 10^{-5} : 1 : 2.67$$

$$D_s^+ 10^{-5} : 1 : 9.75$$

→ 标准模型可以精确预言，
检验轻子普适性

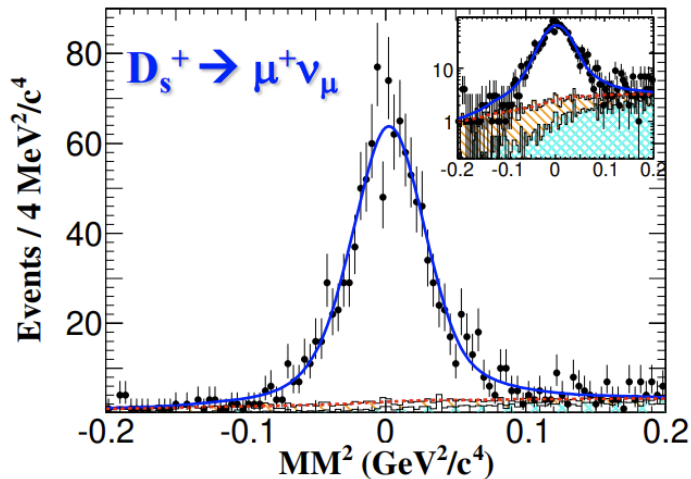
3.9 纯轻子衰变

PRD 89, 051104



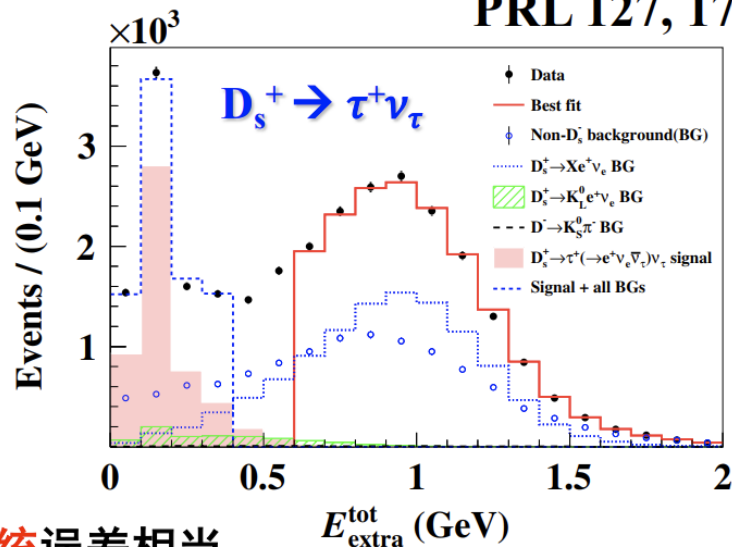
本底非常低，统计误差主导

PRL 122, 071802



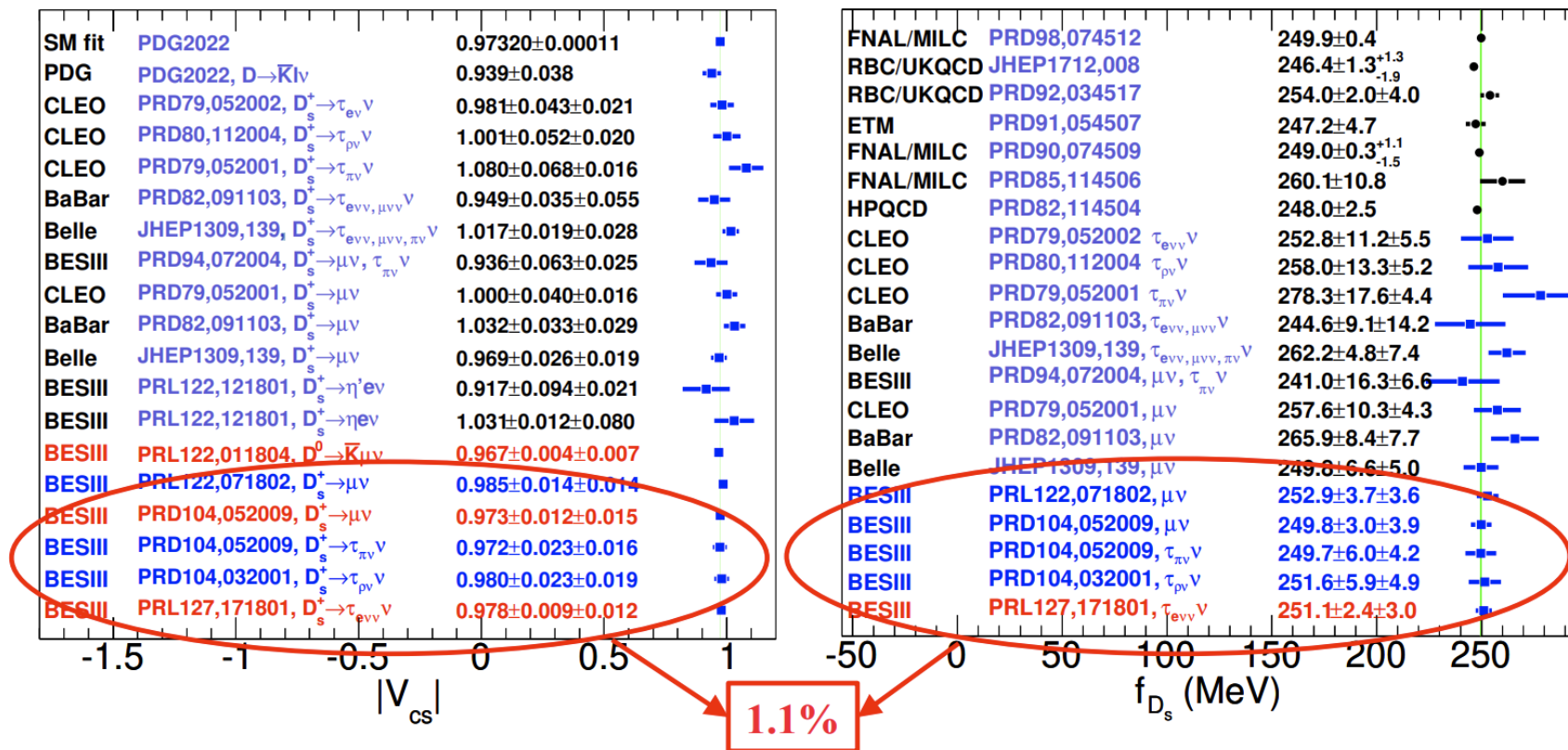
统计误差和系统误差相当

PRL 127, 171801



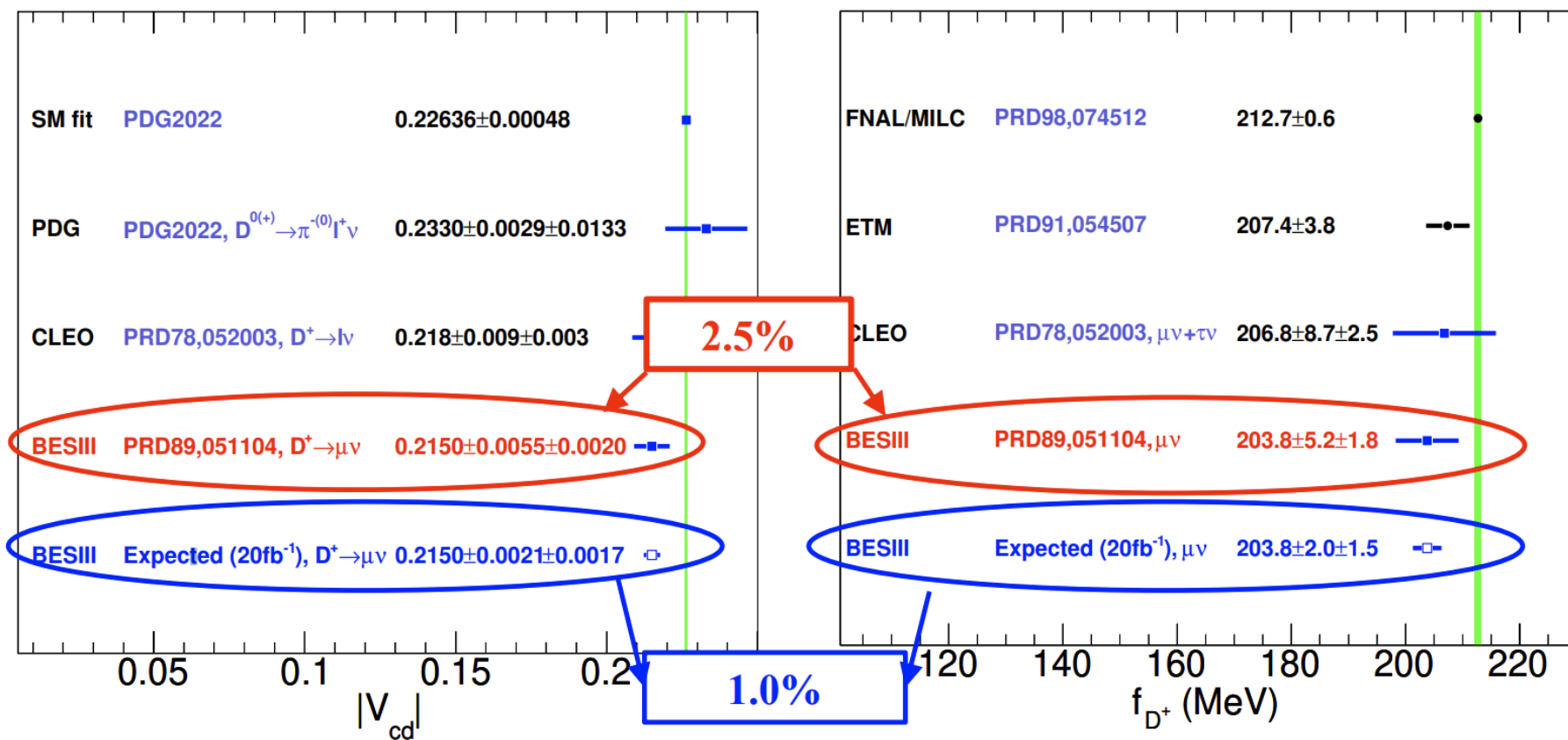
3.9 纯轻子衰变

当前 $|V_{cd(s)}|$ 和 $f_{D(s)}$ 的世界平均值由BESIII实验测量结果主导



3.9 纯轻子衰变

当前 $|V_{cd(s)}|$ 和 $f_{D(s)}$ 的世界平均值由**BESIII**实验测量结果主导



3.9 纯轻子衰变

- 理论格点QCD精度：0.2%；单次实验精度：2-3%
- 主要实验：CLEO、Belle、BaBar 和 **BESIII**
- 当前**两倍以上**标准偏差的结果：
 - ◆ 实验与格点 QCD 计算的衰变常数 $f_{D_s} : f_D$ 之比值
 - ◆ 纯轻衰变和半轻衰变中测量的 $|V_{cs}|$
 - ◆ 实验和CKM全局拟合的 $|V_{cs}|/|V_{cd}|$ 比值

BESIII 的近阈粲介子样本在粲介子纯轻衰变的测量中预期达到**国际最佳精度**

3.10 稀有衰变

粲强子提供了一个独特环境用来在稀有/禁戒衰变中检验标准模型和寻找新物理

基于标准模型分支比预言

10⁻⁰

10⁻¹

10⁻²

10⁻³

10⁻⁴

10⁻⁵

10⁻⁶

10⁻⁷

10⁻⁸

10⁻⁹

10⁻¹⁰

10⁻¹¹

10⁻¹²

10⁻¹³

10⁻¹⁴

10⁻¹⁵

卡比玻允许

单卡比玻压低

双卡比玻压低

辐射衰变

长程贡献的双轻子过程：
矢量介子支配 (VMD)

短程贡献的双轻子过程：
味改变中性流 (FCNC)

禁戒 (对称性破坏) 过程：
轻子数 (LNV)、轻子味 (LFV)、
重子数 (BNV)

新物理可能会显著增强分支比!

$$D^0 \rightarrow K^{*0} \gamma / \phi \gamma / \omega \gamma / \rho \gamma$$

$$D^+_{(s)} \rightarrow K^{*+} \gamma / \rho^+ \gamma$$

$$D^{0+} \rightarrow VV'(l^+l^-) / hV(l^+l^-) / hh'V(l^+l^-)$$

$$D^{0+} \rightarrow V l^+ l^- / h l^+ l^- / h h' l^+ l^-$$

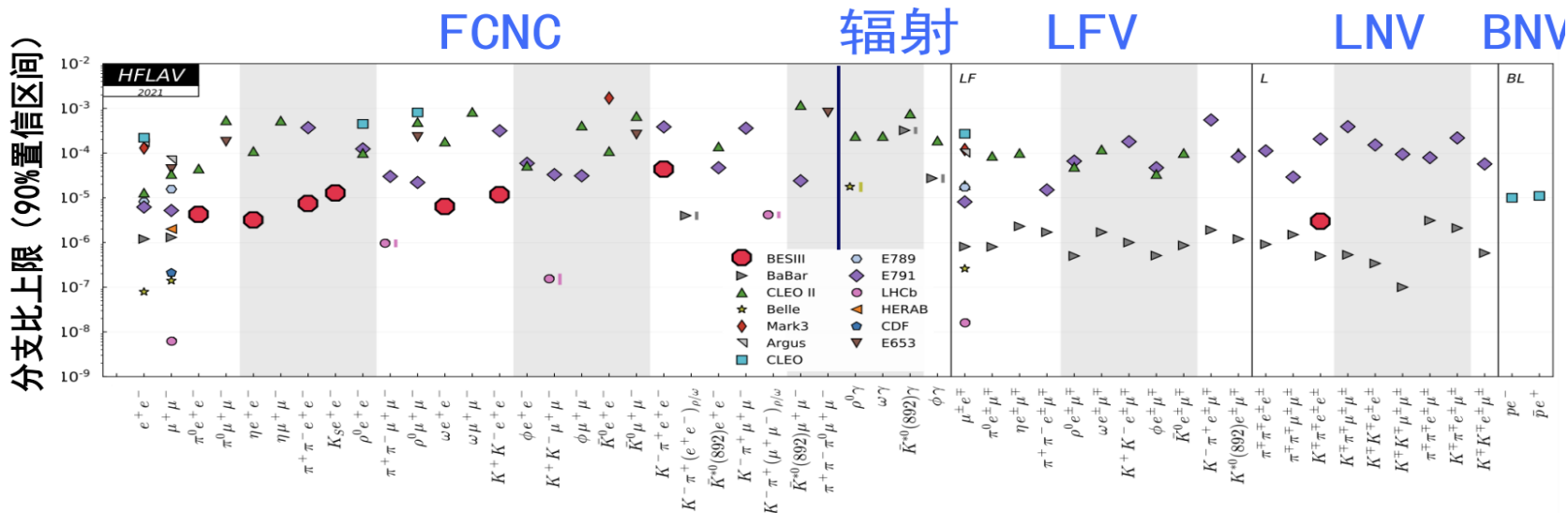
$$D^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- / e^+ e^-$$

$$D \rightarrow (hh) \mu^+ \mu^- / (hh) e^+ e^-$$

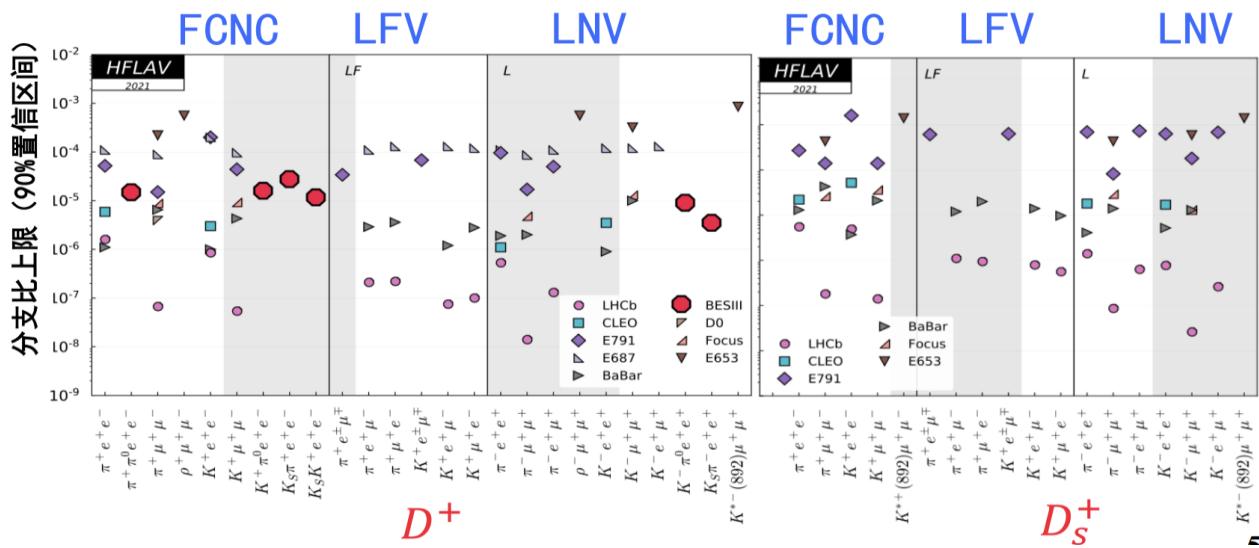
$$D \rightarrow (h) \mu^+ e^-$$

$$D \rightarrow (h) p e^-$$

3.10 稀有衰变



D^0



D^+

D_s^+

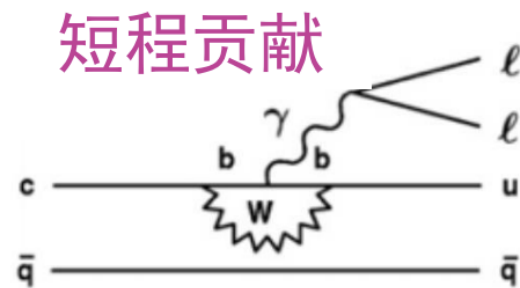
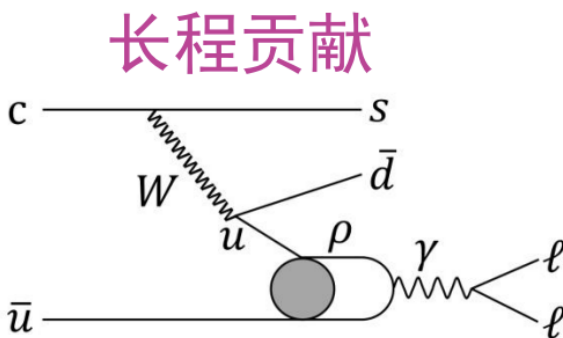
3.10 稀有衰变

味改变中性流过程

- 系统性的研究 $c \rightarrow ull$ 类型的如 $D_{(s)} \rightarrow h(h)e^+e^-$ 和 $D_{(s)} \rightarrow (h)\nu\bar{\nu}$ 等衰变过程 (h 代表介子)
- 对 $D_{(s)} \rightarrow (h)\nu\bar{\nu}$ 过程的搜寻同时对**不可见末态**过程做限制

□ 关键科学问题:

- **理解**来自矢量介子的**长程作用**的贡献，通过测量**短程贡献限制**相关的新物理
- **约束**暗物质相关新物理模型的参数空间



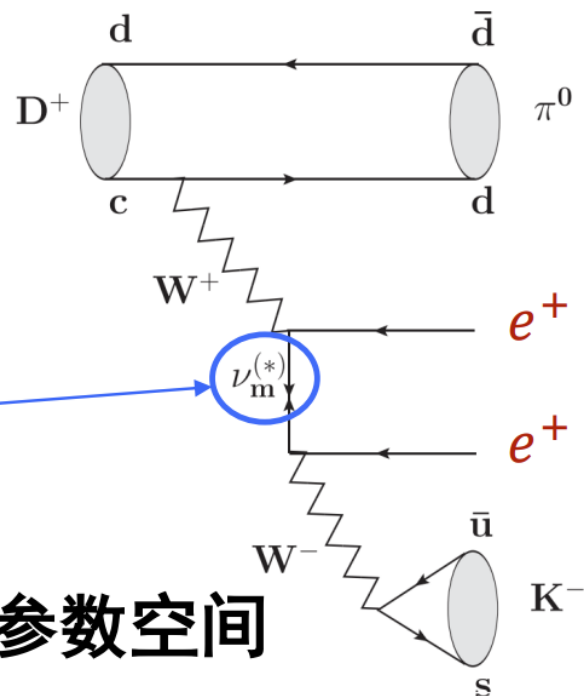
3.10 稀有衰变

对称性破坏过程

- 寻找 $D_{(s)} \rightarrow h(h)e^+e^+$ **轻子数破坏过程**
- 寻找 $D_{(s)} \rightarrow h(h)e^\pm\mu^\mp$ **轻子味破坏过程**
- 寻找 $D_{(s)} \rightarrow Be^\pm$ **重子数破坏过程** (B 代表重子)

□ 关键科学问题:

- **限制马约拉纳中微子质量**
- **检验轻子普适性**
- **约束大统一理论等新物理的参数空间**

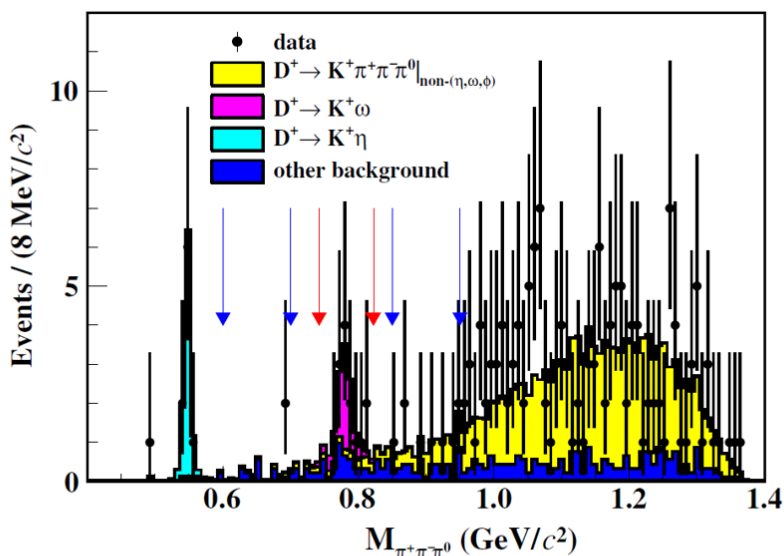


3.11 双卡比博压低过程

粲强子的双Cabibbo压低强子衰变研究

理论预期： $\frac{\text{双Cabibbo压低衰变分支比}}{\text{相应Cabibbo允许衰变分支比}} = \tan^4 \theta_C (\sim 0.29\%)$

θ_C 为 CKM Cabibbo 混合角



BESIII, PRL125, 141802 (2020)

BESIII发现 $D^+ \rightarrow K^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$ 的比值**比理论预期高三倍**

衰变机制的差异，干涉效应？

需要对相关衰变开展振幅分析，理解比值异常的来源